Вписанные многоугольники

М.ПАНОВ, А.СПИВАК

МЫ РАССКАЖЕМ О ЗАДАЧЕ из «Задачника «Кванта» – объясним, откуда она возникла, покажем ее разнообразные связи с другими задачами.

М1624. *Внутри вписанного в окружность выпуклого n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ нашлась отличная от центра окружности точка P, из которой все стороны видны под равными углами. Могут ли длины всех отрезков A_1P, A_2P, … …, A_nP быть рациональными числами? Разберите случаи: а) n = 4; б) n = = 8; в) n = 6; г) n = 5 или 7; д) n > 8.*

Поскольку «связи» даже более красивы и интересны, чем сама задача, кому-то покажется, что она – только повод для разговора. Наверное, так оно и есть. Но один из нас узнал обо всем этом, будучи школьником и заинтересовавшись этой задачей. Приглашаем повторить этот путь.

Свойство правильного треугольника

Если есть ради чего стараться, то не грех и перестараться.

Начнем с классической задачи. Она столь замечательна, что вошла в «Задачник «Кванта» одной из первых.

Задача 1 (М18, а). *На дуге AB описанной окружности равностороннего треугольника ABC взята точка X. Докажите, что AX + BX = CX (рис.1).*

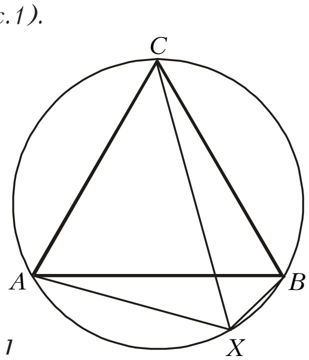

Рис. 1

Первое решение (для восьмиклассников – с равными треугольниками и теоремой о вписанном угле). Отложим на XC отрезок XY, равный отрезку XB (рис. 2).

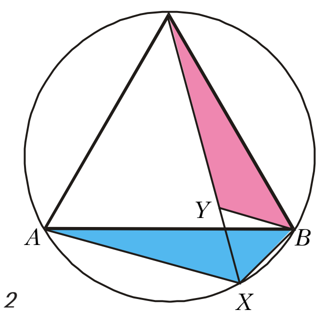

Рис. 2

По теореме о вписанном угле, $\angle CXB = \angle CAB = 60°$. Поэтому ΔXBY правильный. При повороте вокруг B на 60° точка C переходит в A, точка Y – в X. Поэтому треугольники CBY и ABX равны, $CY = AX$. Следовательно,

$$CX = CY + YX = AX + BX.$$

Второе решение (для десятиклассников – с тригонометрическими формулами). Проведем диаметр XX' (рис. 3). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$. Тогда треугольники XAX', XBX', XCX' – прямоугольные с гипотенузой XX'. Следовательно,

$$AX = XX'\cos(60°-\varphi),$$

$$BX = XX'\cos(60°+\varphi),$$

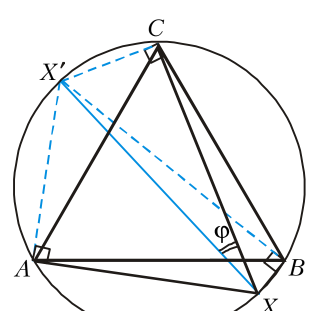

Рис. 3

откуда

$$AX + BX = $$
$$= XX'\left(\cos(60°-\varphi) + \cos(60°+\varphi)\right) =$$
$$= XX' \cdot 2\cos 60° \cos\varphi = XX'\cos\varphi = CX.$$

Третье решение (для учеников математических классов – с теоремой Птолемея). Для вписанного четырехугольника $AXBC$ запишем теорему Птолемея:

$$AX \cdot BC + BX \cdot AC = CX \cdot AB.$$

Разделив на длину стороны треугольника ABC, получим требуемое.

Упражнение 1. На дуге CD описанной окружности квадрата $ABCD$ взята точка P. Докажите, что $AP + CP = \sqrt{2}BP$.

Свойство шестиугольника

Мы решели задачу 1. А сейчас переформулируем ее, изменив до неузнаваемости.

Задача 2. *Если диагонали AD, BE и CF вписанного шестиугольника ABCDEF пересекаются в точке P под углом 60° друг к другу (рис.4), то*

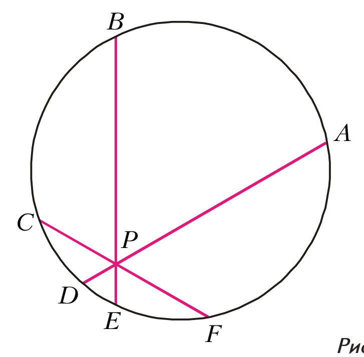

Рис. 4

$$AP + CP + EP = BP + DP + FP. \quad (1)$$

Решение. Проведем через точку P окружность, концентрическую описанной окружности шестиугольника (рис. 5). Тогда

$$AP + CP + EP =$$
$$= AX + XP + CP + EP,$$

$$BP + DP + FP =$$
$$= BY + YP + DP + FZ + ZP.$$

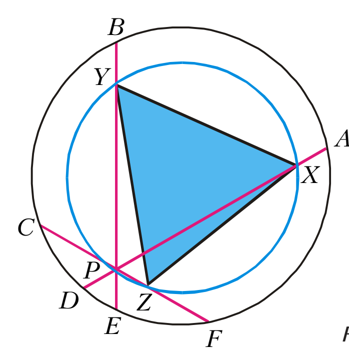

Рис. 5

Поскольку $AX = DP$, $BY = EP$, $CP = FZ$, задача 2 сводится к проверке равенства $XP = YP + ZP$. Оно обеспечено задачей 1, поскольку треугольник XYZ равносторонний (по теореме о вписанном угле, $\angle YZX = \angle YPX = 60°$ и $\angle XYZ = \angle XPZ = 60°$).

Аналогичное задаче 2 утверждение можно сформулировать и в случае, когда точка P лежит вне шестиугольника. А именно, если под углом 60° друг к другу провели три прямые, которые пересекли некоторую окружность, как

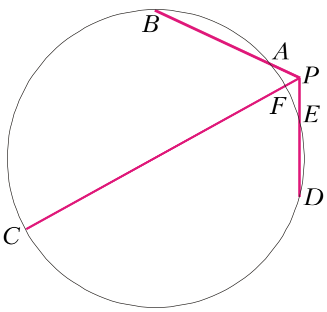

Рис. 6

показано на рисунке 6, то легко доказать равенство

$$-AP + CP - EP = BP + DP - FP.$$

Оно аналогично равенству (1), только некоторые отрезки «взяты со знаком минус».

Упражнения

2. Через точку проведены три прямые под углом 60° друг к другу. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами равностороннего треугольника.

3. а) Через точку провели четыре пря-

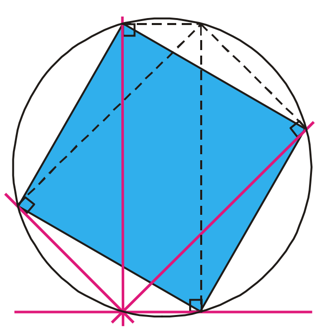

Рис. 7

мые под углом 45° друг к другу (рис. 7). Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой другой точки плоскости на эти прямые, являются вершинами квадрата.

б) Окружность разделили диаметрами на равные дуги и из произвольной точки опустили перпендикуляры на эти диаметры. Докажите, что основания этих перпендикуляров – вершины правильного многоугольника (который вырождается в точку, если «опускать перпендикуляры» из центра окружности, и вырождается в «двуугольник», если окружность разделили двумя диаметрами на четыре равные дуги).

Случай $n = 4$

Займемся пунктом а) задачи М1624. Напомним, что если хорды KM и LN окружности пересекаются в точке S, то $KS \cdot MS = LS \cdot NS$. Более того, легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Если отрезки KM и LN пересекаются в точке S, то необходимым и достаточным условием принадлежности точек K, L, M и N одной окружности является равенство $KS \cdot MS = LS \cdot NS$.*

В силу леммы, для построения примера к пункту а) достаточно взять любые два перпендикулярных отрезка,

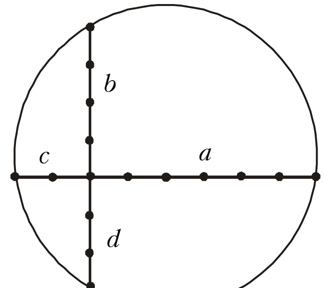

Рис. 8

которые делятся точкой пересечения на такие отрезочки длин a, b, c, d, что $ac = bd$. Годятся, например, $a = 4$, $b = 2$, $c = 1$, $d = 2$ (или $a = 6$, $b = 4$, $c = 2$, $d = 3$, как на рисунке 8).

Случай $n = 6$

Для вписанного шестиугольника $ABCDEF$, диагонали AD, BE, CF которого под равными углами пересекаются в точке P, как мы доказали, выполняются равенства

$$\begin{cases} a + c + e = b + d + f, \\ ad = be = cf, \end{cases} \tag{2}$$

где $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$, $d = PD$, $e = PE$, $f = PF$.

В пункте в) задачи М1624 мы должны выяснить, могут или нет все длины a, b,..., f быть рациональными, если точка P не является центром окружности.

Лемма 2. *Если на пересекающихся под углом 60° друг к другу прямых от точки их пересечения P отложить отрезки $PA = a$, $PB = b$, ..., $PF = f$, для которых выполнены равенства (2), то получится вписанный шестиугольник $ABCDEF$.*

Доказательство. Отложим сначала на двух прямых отрезки $PA = a$, $PB = b$, $PD = d$, $PE = e$. В силу леммы 1, точки A, B, D, E попадут на одну окружность. Рассмотрим точки C' и F' пересечения этой окружности с третьей прямой и обозначим $c' = PC'$, $f' = PF'$. Тогда

$$\begin{cases} a + c' + e = b + d + f', \\ ad = be = c'f', \end{cases} \tag{3}$$

где c' и f' – это вовсе не производные, а всего лишь длины отрезков PC' и PF'.

Из систем (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} c - c' = f - f', \\ cf = c'f'. \end{cases}$$

Запишем первое уравнение в виде $c - f = c' - f'$, возведем в квадрат и прибавим к результату учетверенное второе уравнение:

$$(c + f)^2 = (c' + f')^2.$$

Значит, $c + f = c' + f'$. Вспомнив уравнение $c - f = c' - f'$, получаем $c = c'$, $f = f'$. Лемма 2 доказана.

Упражнение 4. Придумайте другой способ доказательства равенств $c = c'$, $f = f'$, основанный на том, что числа c и $-f$ являются корнями квадратного уравнения $x^2 - (c - f)x = cf$, а «другими» корнями того же самого уравнения являются числа c' и $-f'$.

Чтобы построить пример к пункту в), осталось предъявить решение системы (2) в натуральных числах a, b, c, d, e,

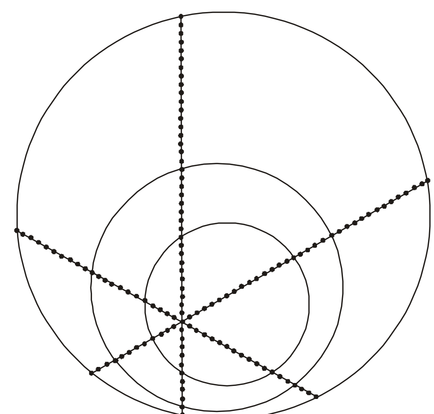

Рис. 9

f, не все из которых равны друг другу. На рисунке 9 приведено даже три примера. Хотите узнать, как их придумали? Решите следующие три упражнения!

Упражнения

5. Придумайте натуральные числа, не все из которых равны друг другу, удовлетворяющие уравнениям $ad = be = cf$.

6. Придумайте решение системы (2) в натуральных числах, не все из которых равны друг другу.

Указание. Воспользуйтесь числами, найденными в предыдущем упражнении, и домножьте их разумным образом.

7. Придумайте бесконечную серию решений системы (2), отличную от $a = b = c = d = e = f$.

Свойство пятиугольника

Задача 3. *На дуге AE описанной окружности правильного пятиугольника ABCDE отмечена точка X. Докажите, что* $AX + CX + EX = BX + DX$.

Первое решение (тригонометрическое). Проведем диаметр XX' (рис.10). Обозначим $\angle CXX' = \varphi$, $XX' = d$.

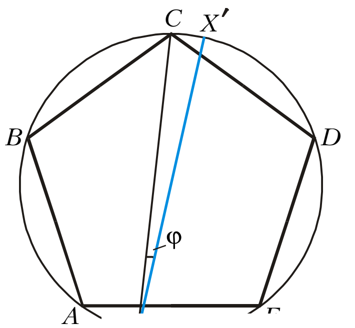

Рис. 10

Тогда треугольник AXX' прямоугольный, откуда $AX = XX'\cos\angle AXX' = d\cos(72°+\varphi)$. Аналогично, $BX = d\cos(36°+\varphi)$, $CX = d\cos\varphi$, $DX = d\cos(36°-\varphi)$, $EX = d\cos(72°-\varphi)$. Значит, осталось проверить тождество

$$\cos(72°+\varphi) + \cos\varphi + \cos(72°-\varphi) = \cos(36°+\varphi) + \cos(36°-\varphi).$$

Поскольку

$$\cos(72°+\varphi) + \cos(72°-\varphi) = 2\cos 72°\cos\varphi,$$
$$\cos(36°+\varphi) + \cos(36°-\varphi) = 2\cos 36°\cos\varphi,$$

достаточно доказать равенство $\cos 36° - \cos 72° = 1/2$.

Домножим его левую часть на $\sin 36°$:

$$\cos 36°\sin 36° - \cos 72°\sin 36° = \frac{1}{2}\sin 72° - \frac{1}{2}(\sin 108° - \sin 36°) = \frac{1}{2}\sin 36°,$$

что и требовалось.

Замечание. Равенство $\cos 36° - \cos 72° = 1/2$ можно доказать проще, проведя биссектрису KN угла K равнобедренного треугольника KLM с углом при вершине $\angle M = 36°$ и основанием $KL = 1$ (рис. 11). Возникнут равнобедренные треугольники LKN и KNM. Значит, $MN = NK = KL = 1$. Опустив перпендикуляры MM_1 и NN_1 на основание треугольника, получим: $KN_1 =$

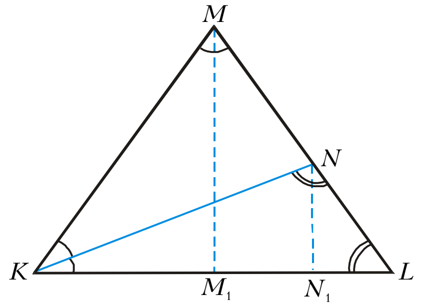

Рис. 11

$= \cos 36°$, $M_1N_1 = MN\cos 72° = \cos 72°$,

$$\cos 36° - \cos 72° = KN_1 - M_1N_1 = KM_1 = 1/2.$$

Второе решение (со скалярными произведениями). Отложим векторы $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ единичной длины вдоль лучей XA, XC, XE, а векторы $\vec{b}$, $\vec{d}$ – вдоль

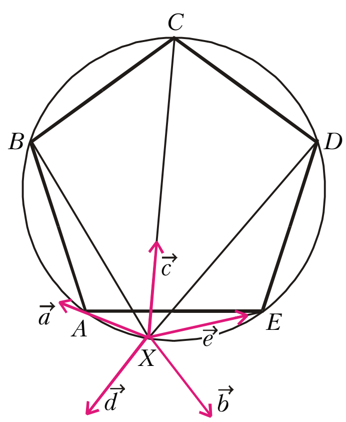

Рис. 12

лучей BX и DX (рис. 12). Тогда $AX = \vec{a}\cdot\vec{XX'}$, $CX = \vec{c}\cdot\vec{XX'}$, $EX = \vec{e}\cdot\vec{XX'}$, $BX = -\vec{b}\cdot\vec{XX'}$, $DX = -\vec{d}\cdot\vec{XX'}$. Значит,

$$AX + CX + EX - BX - DX = (\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d})\vec{XX'}.$$

Проверим равенство $\vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d} = 0$. Для этого заметим, что по теореме о вписанном угле прямые AX, BX, CX, DX и EX пересекаются под равными углами. Если бы сумма $\vec{s} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{e} + \vec{b} + \vec{d}$ была отлична от $\vec{0}$, то вектор $\vec{s}$ изменялся бы при повороте на 72°. Но при этом повороте слагаемые $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$ всего лишь переставляются местами, переходя в $\vec{d}$, $\vec{b}$, $\vec{e}$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ соответственно.

Упражнения

8. Докажите, что для любого правильного многоугольника сумма векторов, проведенных в его вершины из центра описанной окружности, равна нулю.

9. 999 непересекающихся отрезков с концами в вершинах правильного 1998-угольника разбивают эти вершины на пары. Докажите, что на отрезках можно так расставить стрелки, что сумма полученных векторов будет равна нулю. *(Санкт-Петербургская математическая олимпиада 1998 года, С.Берлов)*

10. Правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$ вписан в окружность с радиусом R и центром O. Пусть P – произвольная точка этой окружности. Докажите, что сумма проекций на прямую OP всех n векторов, соединяющих точку P с вершинами n-угольника, равна nR.

11. Вычислите суммы косинусов

а) $\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}$,

б) $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5}$,

в) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$,

г) $\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{2\pi j}{2k+1}$, где k – натуральное число,

д) $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7}$,

е) $\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}$, где k – натуральное число.

Указание. Прочитайте статью Н.Васильева и В.Сендерова «Про угол $\pi/7$ и $\sqrt{7}$» в «Кванте» №2 за 1996 год или статью «Гауссовы суммы» в этом номере.

12. а) Докажите, что для любой точки X дуги A_1A_7 описанной окружности правильного семиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ верно равенство

$$A_1X + A_3X + A_5X + A_7X = A_2X + A_4X + A_6X.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для любого правильного многоугольника с нечетным числом сторон.

13. а) Докажите, что если диагонали A_1A_6, A_2A_7, A_3A_8, A_4A_9, A_5A_{10} вписанного десятиугольника пересекаются под равными углами в точке P, то

$$PA_1 + PA_3 + PA_5 + PA_7 + PA_9 = PA_2 + PA_4 + PA_6 + PA_8 + PA_{10}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для многоугольника с четным числом сторон, не делящимся на 4.

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для 12-угольника.

14. Решите задачу 3 третьим способом, применив теорему Птолемея к четырехугольникам $ABCX$, $BCDX$, $CDEX$, $DEXA$ и $EXAB$.

Случай $n = 8$

Обратимся к пункту б) задачи М1624. Пусть диагонали вписанного восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ пересекаются под равными углами в точке P (рис. 13). Опустим из центра O описанной окружности перпендикуляры OB_1, OB_2, OB_3 и OB_4 на диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 и A_4A_8. Получим, в силу упражнения 3, квадрат $B_1B_2B_3B_4$, на описанной окружности которого лежит точка P. Если бы длины всех отрезков PA_i ($i = 1,\dots, 8$) были рациональны, то и длины отрезков $PB_1 = (PA_5 - PA_1)/2$, ..., $PB_4 = (PA_4 - PA_8)/2$ были бы рациональны, что противоречит равенству $PB_1 + PB_3 = \sqrt{2}PB_2$ упражнения 1.

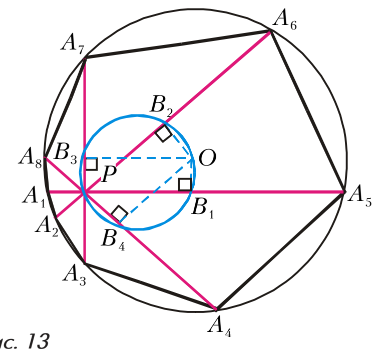

Рис. 13

Случай четного $n > 6$

Займемся пунктом д) для четных n. Пусть, для определенности, центр O окружности лежит внутри угла A_2PA_3. Обозначим $\angle OPA_2 = \theta$. Опустим перпендикуляры PB_1, PB_2 и PB_3 на прямые PA_1, PA_2 и PA_3. Тогда

$$PB_1 = OP\cos\left(\frac{\pi}{n} + \theta\right),$$

$$PB_2 = OP\cos\theta,$$

$$PB_3 = OP\cos\left(\frac{\pi}{n} - \theta\right),$$

откуда

$$PB_1 + PB_3 =$$

$$= 2OP\cos\theta\cos(\pi/n) = 2PB_2\cos(\pi/n),$$

т. е. $\cos(\pi/n) = (PB_1 + PB_3)/(2PB_2)$.

Если бы длины всех отрезков PA_i были рациональными, то и длины

$$PB_1 = (PA_1 - PA_{n+1})/2,$$

$$PB_2 = (PA_2 - PA_{n+2})/2,$$

$$PB_3 = (PA_3 - PA_{n+3})/2$$

были бы рациональными. Но при $n > 3$ число $\cos(\pi/n)$ иррационально (доказательство см. в *Приложении*).

Случай нечетного $n > 3$

Продолжим каждый из лучей A_iP, где $i = 1,\dots, n$, до пересечения с окружностью в точке B_i. В силу упражнения 13,

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n =$$

$$= PB_1 + PB_2 + \ldots + PB_n. \quad (4)$$

По свойству хорд,

$$PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2 = \ldots = PA_n \cdot PB_n.$$

Значит, величина $PA_i \cdot PB_i = c$ одна и та же для всех $i = 1,\dots, n$.

Предположим, что все длины PA_i рациональны. Подставив выражения $PB_i = c/PA_i$ в формулу (4), получим равенство

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n =$$

$$= c\left(\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PA_2} + \frac{1}{PA_n}\right),$$

из которого следует, что c – рациональное число. Значит, рациональны и все выражения $PB_i = c/PA_i$. В предыдущем разделе доказано, что такого не бывает.

Приложение

В заключение докажем иррациональность чисел вида $\cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Существуют многочлены с целыми коэффициентами T_n и Q_{n-1} степеней, соответственно, n и $n - 1$, для которых*

$$\begin{cases}\cos n\alpha = T_n(\cos\alpha),\\ \sin n\alpha = \sin\alpha Q_{n-1}(\cos\alpha).\end{cases}$$

Следствие из леммы 3. *Если число $\cos\alpha$ рационально, то рациональны и все числа вида $\cos k\alpha$, где $k = 1, 2, \ldots$*

Доказательство леммы 3. Применим индукцию. База очевидна: при $n = 1$ имеем $T_1(x) = x$ и $Q_0(x) = 1$.

Переход тоже не сложен:

$$\begin{cases}\cos(n+1)\alpha = \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha =\\ = T_n(\cos\alpha)\cos\alpha - (1-\cos^2\alpha)Q_{n-1}(\cos\alpha),\\ \sin(n+1)\alpha = \cos n\alpha\sin\alpha + \sin n\alpha\cos\alpha =\\ = T_n(\cos\alpha)\sin\alpha + \sin\alpha Q_{n-1}(\cos\alpha)\cos\alpha.\end{cases} \quad (5)$$

Лемма доказана. По индукции из формул (5) легко вывести утверждение следующей леммы.

Лемма 4. *Старшие коэффициенты многочленов T_n и Q_{n-1} равны 2^{n-1}.*

Подготовка закончена. Пора пристально взглянуть на число $x = \cos(\pi/n)$, где n – натуральное число, $n > 3$. Предположим, что число x рационально, и разберем несколько случаев.

Если n делится на 4, то противоречие очевидно:

$$1/\sqrt{2} = \cos(\pi/4) = \cos\left(\frac{\pi}{n}\cdot\frac{n}{4}\right)$$

оказывается, в силу следствия из леммы 3, рациональным числом.

Если n нечетно, воспользуемся равенством

$$-1 = \cos\left(n\cdot\frac{\pi}{n}\right) = T_n\left(\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Оно означает, что x удовлетворяет уравнению $T_n(x) + 1 = 0$. Как известно, рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами имеют вид p/q, где p – делитель свободного члена, а q – делитель старшего коэффициента. В нашем случае q оказывается степенью двойки, а p равно 1, поскольку при нечетном n свободный член многочлена $T_n(x) + 1$ равен 1 (свободный член многочлена T_n можно найти очень легко, подставив $\alpha = \pi/2$ в тождество $\cos(n\alpha) = T_n(\cos\alpha)$). Значит, $x = 1/2^k$ для некоторого целого неотрицательного k. Осталось вспомнить, что $x = \cos(\pi/n) > \cos(\pi/3) = 1/2$ – и противоречие получено.

Случай, когда n обладает нечетным делителем $m > 3$, тоже легко привести к противоречию:

$$\cos\frac{\pi}{m} = \cos\left(\frac{n}{m}\cdot\frac{\pi}{n}\right).$$

А больше никаких случаев рассматривать не надо – любое натуральное число $n > 3$ делится на 4 или имеет нечетный делитель, больший числа 3.