ГАУССОВЫ СУММЫ

2. а) Сложите векторы рисунка 1, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = bx$.

б) Сложите векторы рисунка 2, где $|\vec{OA}| = ax$, $|\vec{OB}| = |\vec{OC}| = bx$.

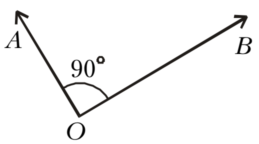

Рис. 1

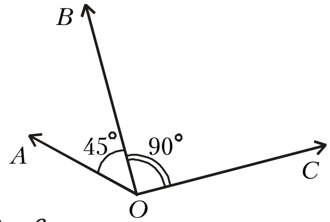

Рис. 2

5. $\sqrt{n/2} = \left|(1-\zeta)(1-\zeta^2)\cdot\ldots\cdot\left(1-\zeta^{(n-2)/2}\right)\right|$.

6. а) n; б) $n^{n/2}\cdot R^{n(n-1)/2}$.

7. В формулу (3) подставьте $n = 5$, $z = 2$. (Применив теорему косинусов, можно доказать, что $PB = \sqrt{6-\sqrt{5}}$ и $PC = \sqrt{6+\sqrt{5}}$.)

8. а) $|1-\zeta^k|$ – длина хорды, стягивающей дугу величиной $2\pi k/n$. Поэтому $|1-\zeta^k| = 2\sin(\pi k/n)$ (здесь $k = 1,\ldots,\frac{n-1}{2}$).
б) $\sqrt{n}/2^{(n-1)/2}$.

9. в) Поскольку $4\sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5}$, имеем $\sqrt{5} = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{3\pi}{5}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}\right)$, откуда получаем представление

$$\sqrt{5} = \left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{5}-i\sin\frac{\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{5}-i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

числа $\sqrt{5}$ в виде суммы корней 10-й степени из единицы.

10. а) $S_5 = 1 + 4\cos\frac{2\pi}{5} = 1 + 4\frac{-1+\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}$.

б) $S_7 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^2 + \zeta^2 + \zeta^4 + \zeta = 1 + 2(\zeta + \zeta^2 + \zeta^4)$. Вычислим сначала вещественную часть: $1 + 2\cos\frac{2\pi}{7} + 2\cos\frac{4\pi}{7} + 2\cos\frac{8\pi}{7} = 1 + \left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{12\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{10\pi}{7}\right) + \left(\cos\frac{8\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right) = 0$, ибо сумма семи векторов рисунка 1 текста статьи равна нулю. Теперь вычислим мнимую часть: $2\left(\sin\frac{2\pi}{7} + \sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7}\right) = 8\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7} = \sqrt{7}$. Итак, $S_7 = i\sqrt{7}$.

в) $S_8 = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta^9 + \zeta^{16} + \zeta^{25} + \zeta^{36} + \zeta^{49} = 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta + 1 + \zeta + \zeta^4 + \zeta = 2 + 4\zeta + 2\zeta^4 = 4\zeta = 2\sqrt{2}(1+i)$; $S_9 = 3 + 2(\zeta + \zeta^4 + \zeta^7) = 3$; $S_{10} = 0$.

11. а) Если $n = 2m$, где m нечетно, то $\zeta^{(m+t)^2} = \zeta^{m^2+2mt+t^2} = \left(\zeta^m\right)^m\cdot\left(\zeta^n\right)^t\cdot\zeta^{t^2} = (-1)^m\cdot\zeta^{t^2} = -\zeta^{t^2}$ при $t = 1,\ldots, m$.

б) Обозначив $a = k - m$, получим

$$S_n\overline{S_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{k^2-m^2} = \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{(a+m)^2-m^2} = \sum_{a=0}^{n-1}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{a^2+2am} = \sum_{a=0}^{n-1}\zeta^{a^2}\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}.$$

При $a = 0$ или $a = n/2$ все n слагаемых суммы $\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}$ равны 1. При всех остальных значениях a сумма $\sum_{m=0}^{n-1}\zeta^{2am}$ равна 0. Следовательно,

$$S_n\overline{S_n} = \left(1+\zeta^{(n/2)^2}\right)n = 2n.$$

12. Поскольку $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$, сопряженное к S_p число есть сумма $\overline{S_p} = 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-4} + \ldots + \zeta^{-(p-1)^2}$. Можно доказать две сформулированные ниже леммы. Из леммы 1 следует, что если простое число p имеет вид $p = 4k + 1$, где k – натуральное число, то последняя сумма отличается от суммы $S_p = 1 + \zeta + \zeta^4 + \ldots + \zeta^{(p-1)^2}$ только порядком слагаемых, так что $\overline{S_p} = S_p$ и $S_p^2 = S_p\overline{S_p} = p$. А из леммы 2 следует, что если $p = 4k + 3$, то рассматриваемые суммы имеют только одно общее слагаемое – число 1. При этом $S_p + \overline{S_p} = 2(1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots + \zeta^{p-1}) = 0$, так что $S_p^2 = S_p\cdot\left(-\overline{S_p}\right) = -p$.

Лемма 1. Для простого $p = 4k + 1$ существует такое целое число x, что $x^2 + 1$ кратно p. (Другими словами, -1 является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 1$.)

Лемма 2. Для простого $p = 4k + 3$ сравнению $x^2 \equiv -y^2 \pmod p$ удовлетворяют только кратные числу p целые числа x, y. (В частности, -1 не является квадратичным вычетом по простому модулю $p = 4k + 3$.)

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6—8»

(см. «Квант» № 4 за 1998 г.)

1. *Ответ*: да, существует. Если $ABCDE$ – правильный пятиугольник, то требуемым свойством обладает, например, четырехугольник $ABCD$.

2. Нетрудно заметить, что точки P и Q симметричны относительно центра O параллелограмма (рис.3). Из равенства площадей треугольников PBM и POM, а также равенства площадей треугольников QCM и QOM, с учетом равенства площадей треугольников POM и QOM, следует требуемое равенство площадей треугольников PBM и QCM.

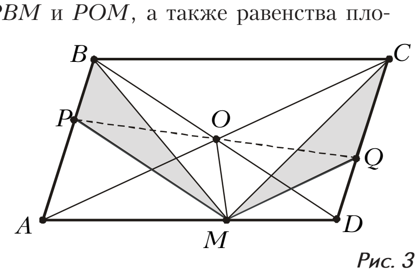

Рис. 3

3. *Ответ*: нет. Сумма двух чисел делится на 3, если либо оба числа делятся на 3, либо одно из них при делении на 3 дает остаток 1, а другое – остаток 2. Все числа, написанные на квадратах, разобьем на три группы:
1) делящиеся на 3;
2) дающие при делении на 3 остаток 1;
3) дающие при делении на 3 остаток 2.
В каждой группе по 8 чисел, и мы можем считать, что у нас имеется 8 «единиц», 8 «двоек» и 8 «троек».

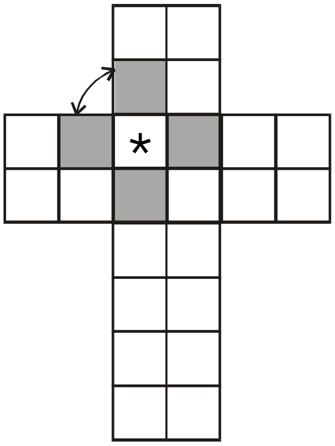

Рис. 4

Теперь рассмотрим развертку нашего куба (рис.4). В выделенных клетках стоят числа одного типа, зависящего только от того, какого типа число стоит вместо звездочки. Но две из выделенных клеток имеют общую сторону, значит, и сумма чисел в этих клетках должна делится на 3. Это возможно лишь в том случае, когда числа в выделенных клетках – «тройки», но тогда и звездочка – это «тройка», и, как легко видеть, вся развертка должна быть заполнена «тройками». Но «троек» не хватит – их всего 8.

4. а) Легко проверить, что числа 131052, 131053, 131054, 131055, 131056 удовлетворяют условию задачи.

б) Докажем, что каждое из $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1052$, $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1053$, $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1054$, $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1055$, $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1056$ делится на сумму своих цифр при любом целом неотрицательном n (в частности, при $n = 332$ отсюда будет следовать утвердительный ответ на пункт б) задачи). Сумма цифр числа $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1052$ делится на 3, а само число делится на 4, следовательно, оно делится и на 12 – сумму своих цифр. Аналогично проверяется делимость числа $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1055$ на сумму своих цифр – число 15.

Из разложений

$$13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1056 = 16\cdot\left(13\cdot10^{6n}\cdot5^4+66\right),$$

$$13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1053 = 13\cdot\left(13\cdot10^{6n+4}+81\right)$$

следует, что каждое из данных чисел делится на сумму своих цифр (соответственно на 16 и 13). Четное число $13\underbrace{00\ldots0}_{6n}1054$ делится на 7 – в этом можно убедиться, например, применив процесс деления «уголком», – следовательно, оно делится и на сумму своих цифр (число 14).

5. Однозначные квадраты 1, 4, 9 взаимно просты, поэтому в искомом наборе не может быть более одного однозначного квадрата. Среди двузначных квадратов существует не более двух квадратов с различными цифрами, имеющих отличный от 1 общий делитель, – это числа 36 и 81. Таким образом, в искомом наборе могут быть лишь следующие комплекты чисел:
одно четырехзначное, два двузначных, одно однозначное;
два трехзначных, одно двузначное, одно однозначное.
В первом случае четырехзначный квадрат должен быть образован цифрами 2, 4, 5, 7, но таких квадратов не существует (см. таблицу квадратов).
Рассмотрим второй случай. Если однозначный квадрат равен 4, то двузначное число должно выбираться среди чисел 16, 36, 64 – в любом из них присутствует цифра 6. Но среди четных трехзначных квадратов с различными цифрами 196, 256, 324, 576, 784 присутствует либо цифра 4, либо цифра 6. Следовательно, и этот случай невозможен. Если же однозначный квадрат равен 9, то двузначный квадрат может быть либо 36, либо 81. Привлекая таблицу квадратов, находим единственно возможный набор: 9, 81, 324, 576.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. Стержень, отбрасывающий тень, должен быть направлен к Северному полюсу мира (в северном полушарии).
2. Нет – с понижением уровня чернил в капельнице промежутки времени между моментами падения капель увеличатся.
3. Катера подойдут к плоту одновременно.
4. Точка пересечения графиков означает, что в этот момент времени тела имеют одинаковые по модулю скорости. Определить, когда тела встретятся, по этим графикам невозможно.
5. Пути, пройденные шариками, равны, а средняя скорость у второго шарика больше; следовательно, он быстрее достигнет точки B.
6. Движение вагона не влияет на характер движения тела по вертикали, поэтому во всех трех случаях тело будет падать в течение одного и того же времени.
7. Если учесть сопротивление воздуха, то вертикальная составляющая ускорения тела на любой высоте при подъеме больше, чем при спуске. Значит, время подъема будет меньше времени спуска.
8. Когда муха перелетает вверх, дно пробирки несколько опускается относительно центра масс системы «пробирка – муха», движущегося с ускорением свободного падения. Таким образом, дно пробирки ударится о землю быстрее, чем в том случае, когда муха будет оставаться неподвижной.
9. И земля, и канат действуют на обоих гимнастов одинаковым образом; следовательно, гимнасты достигнут блока одновременно.
10. Не зависит, поскольку уменьшение веса песка компенсируется силой, с которой ссыпающийся песок ударяет о донышко.
11. Длительное действие остановившегося мальчика вызвало бóльшую деформацию льда.
12. Период колебаний маятника станет бесконечно большим; иначе говоря, с наступлением невесомости колебания прекратятся.
13. Период колебаний груза уменьшится вдвое, так как жесткость шнура возрастет в четыре раза.
14. Чтобы измерить время между излучением и приемом отраженной от цели волны.
15. Молния имеет значительные размеры, звук от более удаленных ее участков запаздывает и растягивается во времени. Скорость же света так велика, что его запаздывание незаметно, и сверкание молнии ощущается как одна вспышка.

Микроопыт

Поскольку уменьшается длина подвеса груза, период колебаний уменьшается.

ВПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

2. Точка пересечения прямых, выбранная точка и основания перпендикуляров лежат на одной окружности.
4. У квадратного уравнения только два корня.
5. Разложите какое-нибудь число на множители разными способами.
7. Вдохновившись равенствами $1\cdot xy = x\cdot y = y\cdot x$, домножим числа 1, x, y на сумму $xy + y + x$, а числа xy, y, x – на сумму $1 + x + y$. Получим набор чисел $a = xy + y + x$, $b = x(xy + y + x)$, $c = y(xy + y + x)$, $d = xy(1 + x + y)$, $e = y(1 + x + y)$, $f = x(1 + x + y)$, удовлетворяющий системе (2) статьи.
9. Занумеруем вершины 1998-угольника по кругу. Поскольку отрезки не пересекаются, с любой стороны от любого из них должно лежать четное число вершин. Тогда каждый отрезок соединяет вершину с четным номером с вершиной, номер которой нечетен. Нарисуем стрелки так, чтобы полученные векторы вели из нечетных вершин в четные. Каждый вектор ра-

вен разности двух векторов, ведущих из центра многоугольника в соответствующие вершины. Поэтому сумма всех 999 векторов равна разности суммы векторов, ведущих из центра в четные вершины, и аналогичной суммы для нечетных вершин. Четные и нечетные вершины по отдельности образуют правильные 999-угольники, а сумма векторов, ведущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю (так как она не меняется при повороте на угол $2\pi/999$). Значит, сумма векторов, нарисованных на отрезках, равна нулю как разность двух нулевых векторов.

10. Сумма векторов с началом в точке P и концами в вершинах n-угольника равна

$$\vec{PA_1} + \vec{PA_2} + \ldots + \vec{PA_n} = \left(\vec{PO} + \vec{OA_1}\right) + \left(\vec{PO} + \vec{OA_2}\right) + \ldots + \left(\vec{PO} + \vec{OA_n}\right) = n\vec{PO} + \left(\vec{OA_1} + \vec{OA_2} + \ldots + \vec{OA_n}\right) = n\vec{PO}.$$

13. в) $PA_1 + PA_5 + PA_9 = PA_3 + PA_7 + PA_{11}$ и $PA_2 + PA_6 + PA_{10} = PA_4 + PA_8 + PA_{12}$.

14. Сложив равенства

$$\begin{aligned}
&AX \cdot BC + CX \cdot AB = BX \cdot AC,\\
&CX \cdot BD = BX \cdot CD + DX \cdot BC,\\
&CX \cdot DE + EX \cdot CD = DX \cdot CE,\\
&AX \cdot DE + EX \cdot AD = DX \cdot AE,\\
&AX \cdot BE + EX \cdot AB = BX \cdot AE,
\end{aligned}$$

получим

$$AX(2a+d) + CX(2a+d) + EX(2a+d) = BX(2a+d) + DX(2a+d),$$

где a – сторона пятиугольника, d – его диагональ. Разделив на $2a+d$, получим утверждение задачи 3.

ВОЛШЕБНАЯ ЛИНЗА

1. $CF_1 = R/(n-1)$.

3. $F = \dfrac{R}{2}\dfrac{(2n_2 - n_1)}{(n_1 - n_2)}\dfrac{1}{n_2}$, при $2n_2 < n_1$ фокус находится внутри шара.

4. Многим сразу приходит на ум использовать для этой цели дополнительно сильную рассеивающую линзу, расположив ее соосно с исследуемой линзой на небольшом расстоянии от ее поверхности. Как и в случае с водой, предмет, находящийся в фокусе «волшебной» линзы, становится хорошо наблюдаемым. Это верное решение. Однако можно с успехом воспользоваться также и короткофокусной собирающей линзой. Только в этом случае изображение объекта будет перевернутым.

5. Оргстекло (плексиглас, полиметилметакрилат) – материал, плохо смачиваемый водой. Поэтому требуется создать избыточное давление порядка $\Delta p = \sigma/d$, чтобы «загнать» воду в узкий зазор со стенками из оргстекла (здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, d – величина воздушного зазора).

ОБ АМПЛИТУДАХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

1. Амплитуда колебаний скорости будет максимальной, если действие силы прекращается в момент прохождения грузом смещенного положения равновесия $\Delta L = F/k$, т.е. $\tau = T/4 + nT/2 = (0{,}052 + n \cdot 0{,}1)$ с, где $n = 1, 2, 3, \ldots$ и $T = 2\pi\sqrt{m/k} \approx 0{,}21$ с.

2. $V = \dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{2\pi X}{T}$. **3.** $m_2 = \dfrac{4\pi^2 X}{T^2 g}m_1$.

4. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{100\%}{\delta}\dfrac{3\Delta L}{g}} \approx 2{,}6$ с. **5.** $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\dfrac{L}{g}}$.

6. $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}} \approx 1{,}18 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, где $k = 2\dfrac{U(r) - U(r_0)}{(r - r_0)^2}$, $r_0 = 0{,}11$ нм; $X_1 = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3h\omega}{2\pi k}} \approx 0{,}76 \cdot 10^{-11}$ м.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\pm\dfrac{11\pi}{12} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4t^2 + 2\left(\sqrt{3} + 1\right)t + \sqrt{3} = 0, \\ \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le 0, \\ t = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

2. $(-4; 1) \cup (1; 5/3) \cup (5/3; 11)$. *Указание.* Поскольку выражение $|a| - |b|$ имеет тот же знак, что и $a^2 - b^2$, а знак выражения $\log_2 u - \log_2 v$ совпадает со знаком $u - v$ при $u > 0$ и $v > 0$, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(2x+8) - (13-x)}{\left(x^2 + 2x - 3\right)^2 - \left(2x^2 - 10x + 8\right)^2} \ge 0, \\ 2x + 8 > 0, \\ 13 - x > 0. \end{cases}$$

3. 22. *Указание.* Пусть A' – точка, симметричная точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку BE, а D' – точка, симметричная точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку CE. Четырехугольник $A'BCD'$ – параллелограмм, точка E лежит на $A'D'$, а площадь его равна площади $ABCDE$.

4. $k \in \left(\dfrac{1 + \mathrm{tg}^2\dfrac{1}{3}}{2}; 1\right]$. *Указание.* Система

$$\begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} - \arcsin x, \\ y = -\dfrac{2}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\, kx, \\ y > 0 \end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $k\sin\alpha = \mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, где $\alpha = -y - \dfrac{2}{3}$, имеет решение на промежутке $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha < -\dfrac{2}{3}$.

5. 5; 16/3. *Указание.* Поскольку центр сферы лежит в плоскости ABC, а плоскости DSB и ASC перпендикулярны плоскости ABC, $\angle DSB = \angle ASC = 90°$. Треугольник ASC прямоугольный, поэтому $SC^2 = HC \cdot AC$. Пусть $SC = x$.

Тогда $AC = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$ и $x^2 = 4\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$, откуда $SC = 5$, $AC = \frac{25}{4}$, $AH = \frac{9}{4}$.

Из равенства $AB^2 = BS^2 = BH \cdot BD$ следует, что $\frac{AB}{BH} = \frac{BD}{AB}$, а это значит, что треугольники AHB и DAB подобны. Поэтому $\angle ADB = \angle BAC$. Но $\angle BAC = \angle CDB$ как вписанные углы, поэтому BD – биссектриса угла D. По свойству биссектрисы $CD = AD \cdot \frac{CH}{AH} = 16/3$.

6. 2. *Указание.* После введения новых координат $z = y + x$, $a = y - x$ задача сводится к исследованию проекции параллельно прямой $a = \mathrm{const}$ на прямую $z = 2$ множества, задаваемого неравенствами

$$a^2z^2 + 6az - z^2 + 6z - a + 1 < 0,\ z > 1.$$

Но это равносильно исследованию разрешимости системы неравенств $\left(a^2 - 1\right)z^2 + 6(a+1)z - (a-1) < 0$, $z > 1$ в зависимости от параметра a, что в свою очередь равносильно отысканию всех значений a, при которых квадратный трехчлен $f(z) = \left(a^2 - 1\right)z^2 + 6(a+1)z - (a-1)$ имеет хотя бы один корень, больший единицы.

Вариант 2

1. $\left[3; \left(11 + \sqrt{61}\right)/2\right]$.

2. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

3. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\arccos\frac{3}{4}$. *Указание.* Пусть $FH = 2x$, $\angle BCA = \alpha$, FD – средняя линия треугольника ABC. Возможны 2 случая расположения точки H: на отрезке BE и на отрезке AE. Из теоремы синусов для треугольника FGH получим уравнение $2\sin 2\alpha = 3\sin\alpha$.

5. $\frac{9}{4} + 4n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Вычитая из первого уравнения системы второе, получим, что

$$(\cos\pi xy - 1)^2 + \sin^2\pi x + \sin^2\pi y = 0,$$

откуда следует, что x и y – целые числа, причем одно из них четно. Кроме того, $x^2 + y^2 < 1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) < 5$.

Поэтому решениями данной системы могут быть только пары (0; 1), (0; –1), (1; 0), (–1; 0), (2; 0), (–2; 0), (0; 2), (0; –2). А так как если (x_0, y_0) – решение, то $(-x_0, -y_0)$ – тоже решение, необходимо найти все α, при которых система имеет ровно два решения из четырех: (0; 1), (1; 0), (2; 0), (0; 2).

6. 48. *Указание.* Пусть O – центр сферы. Докажите, что DO – перпендикуляр к плоскости ABC, пересекающий ее в точке E – центре вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите затем, что треугольники ADL, KDB и MDC – прямоугольные, и найдите их углы, после чего выразите через $DK = DM = DL = h$ полупериметр p и площадь S треугольника ABC. Далее, пользуясь формулой Герона и тем, что $S = rp$, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности, выразите через h величину $ER = r$, а затем и $DE = H$ – высоту пирамиды. Теперь осталось из прямоугольного треугольника DKO найти h (по условию $OK = 3$), вычислить S, а затем и искомый объем.

Вариант 3

1. $\left(-\frac{9 + \sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. $(-1; 0) \cup [1; 5)$.

3. $\pi \pm \mathrm{arctg}\,2 + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Поскольку $\cos x \neq 0$, разделив левую часть на $\cos^3 x$, получаем, что

$$\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{tg}^2 x + 12 = 0 \text{ при } \sin x \geq 0 \text{ и}$$

$$\mathrm{tg}^3 x + \mathrm{tg}^2 x - 12 = 0 \text{ при } \sin x < 0.$$

Дальнейшее ясно.

4. 216. *Указание.* Пусть M – середина AB, L – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на ребро SC. В треугольнике MSC точка D – основание высоты, $\angle SMD = \frac{\pi}{6}$; пусть $MD = x$, тогда $DC = 2x$. Выразите через x отрезки SK, SD, а затем из подобия треугольников SKL и SDC найдите x.

5. $\left(-\infty; -\sqrt{13}\right] \cup \left[\frac{11}{3}; \infty\right)$. *Указание.* Решения первого неравенства образуют отрезок $-1 \leq y \leq 3$. Поскольку второе неравенство имеет вид $f(x) \geq g(y)$ (через f и g обозначены левая и правая части соответственно), задачу можно переформулировать так: при каких a наибольшее значение функции f не меньше наименьшего значения функции g. Пусть $t = \arcsin x$, тогда

$$f(x) = \sqrt{a^2 - 16 + h(t)}, \text{ где } h(t) = -\frac{4}{\pi^2}t^2 - \frac{2}{\pi}t + \frac{6}{\pi}|t|.$$

Нетрудно найти $\max\limits_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} h(t) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Поэтому

$\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \sqrt{a^2 - 13}$.

Минимум правой части зависит от положения вершины параболы $y_в = -a$ относительно отрезка $[-1; 3]$. Рассмотрев три возможных случая $y_в < -1$; $-1 \leq y_в \leq 3$ и $y_в \geq 3$, получаем ответ.

6. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. *Решение.* Пусть AK, CL – высоты ΔABC; N, E – точки пересечения прямой AO с BC и описанной окружностью (радиусом R) соответственно. Так как $AC < AD$, то $\angle ADC < \angle ACD < \frac{\pi}{2}$, следовательно, ΔADC – остроугольный, поэтому точка K лежит между D и C. Тогда из условия следует, что N лежит между B и D. $\angle CAH = \angle OAB = \alpha$ (так как $\angle ACB = \angle AEB$ – вписанные, опирающиеся на одну дугу, и $\angle AKC = \angle ABE = \frac{\pi}{2}$). Так как AD – биссектриса, то $\angle KAD = \angle DAO = \beta$. Таким образом, $\angle CAB = 2\alpha + 2\beta$; $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\angle CBA = \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\beta$. Пусть M – точка, симметричная H относительно AB. Тогда M лежит на описанной окружности. Действительно, $\angle AHB = \angle AMB$, а $\angle AHB + \angle ACB = \pi$. Далее, $AH = AO$ (так как AD – биссектриса и медиана в ΔAHO). Но $AH = AM$, значит, $AM = AO$. Следовательно, $AM = R$. Отсюда $\angle ACM = \frac{\pi}{6}$ (как вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу). Так как ΔACL – прямоугольный, $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, то $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$. По теореме косинусов из ΔACD:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 4 - 2\sqrt{2}.$$

По теореме синусов для ΔACD:
$$\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin\angle CDA},$$
откуда
$$\sin\angle CDA = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\left(=\cos\frac{\pi}{8}\right).$$

Значит, $\beta = \angle KAD = \frac{\pi}{8}$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{24}$. Поэтому $\angle CAB = = \frac{5}{24}\cdot\pi = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}$, значит, $2R = \frac{AC}{\sin\angle CBA}$ и $R = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{8}\right)} = = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi}{2}(2n+1),\ \frac{\pi n}{5},\ n\in\boldsymbol{Z}$. **2.** 4; 8. **3.** $(-\infty; 3/2)$.

4. $\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{3\sin(\alpha+\beta)}$. **5.** $(-1; 1)$.

6. $R^2\cos\alpha(1+\sin\alpha)$. *Указание.* Площадь четырехугольника удобно найти по формуле: «полупроизведение диагоналей на синус угла между ними». Угол между диагоналями AM и BN легко вычисляется через α, если заметить, что $OD\|BM$, где OD – радиус окружности с диаметром CB.

7. $\left(-\infty; \log_a\frac{5}{3-a}\right)$ при $0<a<1$;

$\left(\log_a\frac{5}{3}; \log_a\frac{5}{3-a}\right)$ при $1<a<3$;

$\left(\log_a\frac{5}{3};+\infty\right)$ при $a\geq 3$.

8. $\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$. *Указание.* Параллельный перенос одной из диагоналей, например A_1B в положение A_2A, дает треугольник A_2C_1A с заданным углом α, все стороны которого выражаются через $x = AB = A_2A_1 = A_1C_1$, после чего x находится по теореме косинусов.

Вариант 5

1. 0. **2.** $[-3; 1)$. **3.** $(-1; 1; \pm 2)$. *Указание*. Приведите первое уравнение к виду $(x+1)^2+(y-1)^2=0$.

4. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Приведите уравнение к виду
$$t^2-(\cos 2x+\cos 6x)t+1=0,$$
где $t = \sin x$. Его дискриминант $(\cos 2x+\cos 6x)^2-4\geq 0$, откуда следует, что либо $\cos 2x + \cos 6x = 2$, либо $\cos 2x + \cos 6x = -2$. В первом случае $\sin x = 1$, но тогда $\cos 2x + \cos 6x = -2$ — противоречие. Во втором случае $\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $\cos 2x + \cos 6x = -2$.

5. 27/4. *Решение.* По свойству пересекающихся хорд $CE\cdot ED = AE\cdot BE$, откуда $CE = 3$.
Пусть O – центр окружности, а $\angle AOC = \alpha$. Тогда $\angle ACD = = \frac{\alpha}{2}$, $\angle CKB = \alpha$. Прямоугольные треугольники COK и BOK равны. Поэтому $\angle OKB = \frac{1}{2}\angle CKB = \frac{\alpha}{2}$, $\Delta ACE \sim \Delta OKB$ и $KB = \frac{OB}{AE}\cdot CE = 15$. Так как $CD\perp AB$, то $CD\|KB$ и $\Delta AME\sim\Delta AKE$, откуда $ME = KB\cdot\frac{AE}{AB} = \frac{3}{2}$ и $S_{\Delta CKM} = \frac{1}{2}CM\cdot BE = \frac{27}{4}$.

6. 1/4. *Указание.* После замены $y = 4x + 1$ уравнение приводится к виду
$$\log_5(y+3)\big(\log_2 y-\log_3(y+1)\big) = = \log_3(y+1)\big(\log_5(y+3)-\log_4(y+2)\big).\quad (*)$$
Нетрудно видеть, что $y = 2$ – корень уравнения $(*)$. Функция
$$f(y)=\log_2 y-\log_3(y+1) = \frac{\log_2 y(\log_2 3-1)-\log_2\left(1+\frac{1}{y}\right)}{\log_2 3}$$
является возрастающей как сумма двух возрастающих функций ($\log_2 y$ возрастает, $-\log_2\left(1+\frac{1}{y}\right)$ – тоже возрастает). Следовательно, $f(y) < 0$ при $0 < y < 2$ и $f(y) > 0$ при $y > 2$.
Аналогично, функция
$$g(y)=\log_5(y+3)-\log_4(y+2)$$
– убывающая, обращающаяся в нуль при $y = 2$, поэтому $g(y) > 0$ при $0 < y < 2$ и $g(y) < 0$ при $y > 2$.

Вариант 6

1. $\frac{2-7\sqrt{3}}{14\sqrt{3}+10}$. **2.** $[-6; -1]\cup[0; +\infty)$.

3. $\pi n,\ -\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$.

4. 91/25. *Указание.* Точка O – центр окружности, вписанной в треугольник ABC, $\angle AOB = 135°$, откуда $AB = 5$, радиус вписанной окружности $\frac{3}{5}$, периметр треугольника ABC равен 56/5.

5. $t = 1$; $x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Первое неравенство приводится к виду
$$3\left(2^t-2\right)^2+2\left(\sin 5x+\frac{1}{2}\right)^2\leq 0,$$
откуда $t = 1$, $\sin 5x = -\frac{1}{2}$.

Вариант 7

1. 7/9. **2.** $-1/\sqrt{10}$; $|\cos\alpha/2|$.

3. $(-3; -2)\{-1\}\cup(0; 1)$. *Указание.* Выполните замену $t = =|x+1|$ и примените метод интервалов.

4. $(-1; 1/\sqrt{3})$, $(3/2; 9)$.

5. 25/72. *Указание.* Часть куба, содержащая точку B_1, – треугольная пирамида, от которой отрезаны «угловые тетраэдры». Считая, что ребро куба равно 1, найдите объемы упомянутых пирамид.

6. а) $|a|\leq\sqrt{26}+1$; б) $|a|\leq\sqrt{26}-1$. *Указание.* Преобразуем уравнение к виду
$$(5+\cos b)\cos x+(1+\sin b)\sin x = a,$$
или
$$\sqrt{27+10\cos b+2\sin b}\,\sin(x+\varphi) = a,$$

где φ — вспомогательный угол; поскольку

$$5\cos b + \sin b = \sqrt{26}\sin(b+\alpha),$$

где $\alpha = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$, получаем уравнение

$$\sqrt{27 + 2\sqrt{26}\sin(b+\alpha)}\sin(x+\varphi) = a. \qquad (*)$$

Поскольку $\sqrt{26} - 1 \le \sqrt{27 + 2\sqrt{26}\sin(b+\alpha)} \le \sqrt{26} + 1$, получаем, что при любом $|a| \le \sqrt{26} + 1$ найдется b, при котором уравнение $(*)$ имеет корни, а при $|a| \le \sqrt{26} - 1$ это уравнение имеет корни при всех b.

Вариант 8

1. -1. **2.** $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; $\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$.

3. $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{3}$, $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}6 + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
4. 1000 л. **5.** $(2; 19/9) \cup (3; 2+\sqrt{3})$.
6. 319. *Указание.* Воспользуйтесь подобием треугольников PMS и RQM.
7. $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(3+\sqrt{10}; -3+\sqrt{10})$, $(3-\sqrt{10}; -3-\sqrt{10})$.
8. $a = 0$, $a = 1$. *Указание.* Уравнение преобразуется к виду

$$|x-2a| + \frac{1}{|x-2a|} + (x-1)^2 = 2,$$

откуда $|x-2a| = 1$, $x = 1$.

Вариант 9

1. $\left(\frac{1}{3}; 3\right]$. **2.** 2.

3. 3. **4.** $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения не превосходит 2, а правая – не меньше, чем 2. Поэтому $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$, $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

5. $\sqrt{31}/6$.

6. $(15k^2 - 6k; 3k-1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из условия следует, что $3x = (y+1)(5y-1)$. Поэтому либо $y + 1$, либо $5y - 1 = 5(y+1) - 6$ делится на 3. Отсюда следует, что $y = 3k - 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 10

1. $[-3; 1)$. **2.** $AB = AC = 2\sqrt{10}$. **3.** $\sqrt{3} - 2$.
4. а) И; б) Р. *Указание.* а) Выпишите последовательность букв, удовлетворяющую указанному правилу, и подсчитайте, какая из них чаще других встречается в периоде. б) Пусть a и b — цифры, с помощью которых записывается порядковый номер $\overline{ab}$ этой буквы. Цикл состоит из одной буквы, если и только если $2(a + b) = 10a + b$, т.е. $b = 8a$, откуда $a = 1$, $b = 8$.
5. 0. *Указание.* Левая часть неравенства не меньше двух. Правая – не больше двух, причем равенство достигается лишь при $x = 0$.
6. (1; 5). *Указание.* Система $\sin(x+6) = 0$, $\sin\pi x = 0$ имеет единственное решение $x = -6$. Поэтому мы должны найти такие a, при которых уравнение не имеет других решений. Разделив уравнение на $\sin^2\pi x$ и выполнив замену $t = \frac{\sin(x+6)}{\sin\pi x}$, получим

$$t^2 - (a-1)t + (a-1) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение $(*)$ не имеет корней при $1 < a < 5$, при этом исходное уравнение имеет единственное решение $x = -6$. При остальных значениях a уравнение имеет бесконечно много решений (докажите это).

Вариант 11

1. $x \in \left(\frac{1}{4}; 3\right) \cup \left[\frac{\sqrt{41}+7}{4}; \frac{7}{2}\right)$.

2. $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi - \arcsin\frac{\sqrt{37}-1}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
3. (17; 248). *Указание.* Выполните замену $p = \sqrt{x+8}$.
4. Пусть $K'L' = l$. В зависимости от положения точек K' и L' возможны случаи

а) $l = \sqrt{10}$, если $K' \in [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;

б) $l = \sqrt{346}$, если $K \notin [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$;

в) $l \in \left(\frac{\sqrt{634}}{5}; +\infty\right)$, если $K \notin [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;

г) $l \in \left(\frac{\sqrt{8194}}{5}; +\infty\right)$, если $K' \in [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$.

5. $c \in (3 - 2\sqrt{3}; -6 + 2\sqrt{15})$. **6.** $\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{r^2 - a^2/3}$.
7. 426 р. и 142 р. *Решение.* Обозначим через x, y, z количества акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокера соответственно, а через p и q – цены на акции видов A и $Б$. Тогда из условия задачи следуют уравнения

$$\begin{cases} px + q(11-x) = 4402, \\ py + q(21-y) = 4402, \\ pz + q(29-z) = 4402, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-q)x + 11q = 4402, \\ (p-q)y + 21q = 4402, \\ (p-q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого и второго, получаем

$$(p-q)(x-z) = 18q,\ (p-q)(y-z) = 8q. \qquad (*)$$

Поскольку по условию $p > q > 0$, то $x - z > 0$ и $y - z > 0$. После деления уравнений в $(*)$ имеем

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{9}{4}.$$

Используя целочисленность переменных, получаем $x = z + 9n$, $y = z + 4n$, где $n \in \boldsymbol{N}$. Так как $11 > x = z + 9n > z > 0$, то $z = 1$, $n = 1$. Поэтому $x = 10$, $y = 5$. Обращаясь к исходной системе, находим $p = 426$, $q = 142$.

Вариант 12

1. $(-17/5; 11/3)$. **2.** $\operatorname{tg}\frac{226\pi}{17}$. **3.** $\left[-\frac{7}{4}; -\frac{2}{3}\right) \cup \left[\frac{17+\sqrt{117}}{9}; 8\right)$.
4. $\frac{\pi}{8}(2n+1)$, $n = -1, 0, 1, 2$; $-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10}k$, $k = 1, 2, 3, 4$.
5. $\frac{2b+l}{c}$. *Указание.* Пусть BO – биссектриса угла B в треугольнике ABL, а $\angle ABO = \angle LBO = \beta$. Тогда

$$\frac{1}{2}AB \cdot BL\sin 2\beta = S_{ABL} = S_{ABO} + S_{LBO} = \frac{1}{2}AB \cdot BO\sin\beta + \frac{1}{2}BL \cdot BO\sin\beta = \frac{1}{2}(AB + BL)\cdot BO\sin\beta,$$

откуда

$$\frac{AB \cdot BL}{AB + BL} = \frac{BO}{2\cos\beta}.$$

Аналогично, из треугольника MBN имеем

$$\frac{MB \cdot BN}{MB + BN} = \frac{BO}{2\cos\beta},$$

но тогда

$$\frac{S_{ABL}}{S_{MBN}} = \frac{AB \cdot BL}{MB \cdot BN} = \frac{MB + BN}{AB + BL} = \frac{c}{2b + l},$$

так как из свойств касательных к окружности, вписанной в треугольник ABL, следует равенство

$$AB + BL = 2 \cdot BK + AL = 2b + l.$$

6. $a = -1$, $b \geq 3$, $b \in \boldsymbol{N}$; $a = -2$, $b \geq 4$, $b \in \boldsymbol{N}$.
Указание. Перепишем уравнение так:

$$u + v - |u - v| = 2ab,$$

где $u = \arcsin\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b}$, $v = -b \cdot 2^{\sin \pi bx}$. Если $b > 0$, то $u > v$ и мы получаем уравнение

$$-b \cdot 2^{\sin \pi bx} = ab,$$

откуда либо $a = -1$, либо $a = -2$. В первом случае $\sin \pi bx = 0$, т.е. $x = \frac{n}{b}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. При этом должно быть $|x| \leq b$, или $|n| \leq b^2$. Последнее неравенство имеет больше 10 решений, если $b \geq 3$, и меньше 10, если $b \leq 2$. Аналогично, при $a = -2$ получаем, что $b \geq 4$.
При $b < 0$ получается уравнение

$$\arcsin\frac{\sqrt{b^2 - x^2}}{b} = ab,$$

имеющее не больше двух решений при любых a и b.

Вариант 13

1. $[-6; 0)$. **2.** -3. **3.** 7,2%.

4. $\frac{\sqrt{37}\left(2\sqrt{6} - 1\right)}{3\sqrt{3}}$. *Указание.* Докажите, что $\angle BCA$ – острый, найдите AC из треугольника ADC, затем синус угла BAC, а затем и BC.

5. 33. *Указание.* Пусть a – первый член, а d – разность прогрессии. Если $a_{17} = u$, $S_n = v$, получаем систему

$$\begin{cases} a + 16d = u, \\ na + \frac{n(n-1)}{2}d = v. \end{cases}$$

Эта система неразрешима или имеет бесконечное число решений тогда и только тогда, когда

$$\frac{n(n-1)}{2} - 16n = 0.$$

6. *Указание.* а) Это параболы

$$x = -\frac{9}{2}y^2 - y + 9 \text{ и } y = x^2 - 2x.$$

б) Умножив первое уравнение на $8/9$ и сложив его со вторым уравнением, получим после преобразований уравнение окружности радиусом $\sqrt{161}/9$:

$$\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{9}\right)^2 = \frac{161}{81}.$$

Вариант 14

1. $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **2.** $\pm\sqrt{\log_2\frac{6 + \sqrt{26}}{5}}$.

3. $(-2; 2) \cup (2; 3) \cup (6; +\infty)$. **4.** $8\sqrt{\frac{2}{3}} > 6{,}5$. **5.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

6. 49 и 83. *Указание.* Пусть $m, n \in \boldsymbol{N}$ – искомые числа. По условию задачи

$$mn + 372 = 90n + 29, \text{ т.е. } n(90 - m) = 7^3,$$

причем $29 < n < m < 90$. Поэтому числа n и $90 - m$ являются делителями числа 343, что приводит к единственной возможности:

$$\begin{cases} n = 49, \\ 90 - m = 7. \end{cases}$$

7. $a = 2$. *Указание.* Пусть $z = x^2$. Рассмотрим уравнение

$$z^2 - (a-1)(a+3)z + (a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0.$$

Система имеет 3 решения, если это уравнение имеет корни $z_1 = 0$, $z_2 > 0$. Но тогда

$$(a-1)(a+1)(a-2)(a+4) = 0; \quad (a-1)(a+3) > 0.$$

ФИЗИКА

Физический факультет

1. При решении задачи будем, как обычно, пренебрегать влиянием воздуха на движение снаряда и его частей. Используем декартову систему координат, направив ось OX вдоль горизонтальной составляющей начальной скорости снаряда, а ось OY – вертикально вверх. Обозначим скорости частей снаряда сразу после взрыва $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Поскольку первая часть снаряда полетела вертикально, горизонтальная составляющая ее скорости сразу после взрыва равна нулю: $u_{1x} = 0$. Пренебрегая импульсом сил тяжести за время взрыва и массой сгоревшей при взрыве части снаряда, на основании закона сохранения импульса получим, что горизонтальная составляющая второго осколка сразу после взрыва составляет $u_{2x} = 2v\cos\alpha$ (при этом было учтено, что снаряд разорвался на две равные части). Поскольку взрыв снаряда произошел в верхней точке траектории, согласно закону сохранения импульса, вертикальные составляющие скоростей осколков должны удовлетворять соотношению $u_{1y} + u_{2y} = 0$. Учитывая, что $u_2 = nu_1$, $u_1 = u_{1y}$ и $u_2 = \sqrt{u_{2x}^2 + u_{2y}^2}$, из составленных уравнений находим скорость первого осколка сразу после взрыва: $u_1 = (2v\cos\alpha)\big/\sqrt{n^2 - 1}$. После взрыва оба осколка совершают свободное падение; следовательно, один осколок относительно другого движется с неизменной скоростью, а потому искомое расстояние равно $L(\tau) = u_{\text{отн}}\tau$, где $\vec{u}_{\text{отн}} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$. После алгебраических преобразований получим

$$L(\tau) = \tau\sqrt{(2v\cos\alpha)^2 + (2u_1)^2} = 2v\tau\sqrt{\frac{n^2 + 3}{n^2 - 1}}\cos\alpha.$$

2. На рисунке 5 показаны силы, действующие на шарик: силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила тяжести $m\vec{g}$. При этом, как обычно, мы пренебрегли силами, действующими на шарик со стороны воздуха. Обозначим угол между плоскостью, в которой располагаются нити, и осью вращения через φ. Поскольку ось вращается равномерно, траектория шарика имеет вид окружности, расположенной в горизонтальной плоскости. Учитывая, что шарик подвешен на одинаковых нитях, прикрепленных симметрично к горизонтальной штанге, можно показать, что радиус этой окружности равен $r = L\cos(\alpha/2)\sin\varphi$. Поскольку нити расположены симметрично, их силы натяжения равны по модулю: $T_1 = T_2 = T$. В соответствии со вторым законом Ньютона, запишем уравнения движения шарика в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$ma = m\omega^2 r = 2T\cos(\alpha/2)\sin\varphi, \quad 0 = mg - 2T\cos(\alpha/2)\cos\varphi.$$

Сила натяжения нитей при любых угловых скоростях враще-

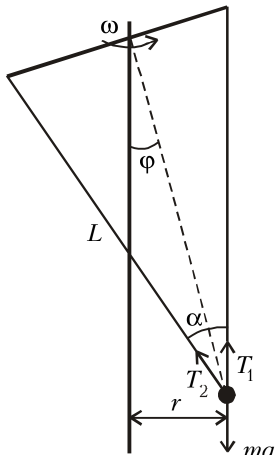

Рис. 5

ния оси должна удовлетворять неравенству

$$T \geq \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)},$$

поэтому при

$$\omega^2 \leq \omega_{\text{кр}}^2 = \frac{g}{L\cos(\alpha/2)}$$

отклонение от вертикали плоскости, в которой лежат нити, должно быть равно нулю и, следовательно,

$$T = \frac{mg}{2\cos(\alpha/2)}.$$

Если же $\omega > \omega_{\text{кр}}$, то $\varphi \neq 0$ и

$$T = \frac{m\omega^2 L}{2}.$$

3. Если пренебречь затуханием, то уравнение движения груза в проекциях на ось OX, направленную вертикально вниз, можно записать в виде

$$mx'' = -k\left(x_0 + x\right) + mg,$$

где k – жесткость полоски, x_0 – деформация полоски под действием неподвижно висящего на ней груза, x – смещение груза от равновесного положения. При равновесии груза сумма сил, действующих на него, равна нулю, т.е. $mg = kx_0$, а уравнение движения груза принимает вид

$$mx'' = -kx.$$

Следовательно, малые вертикальные колебания груза будут гармоническими, причем период этих колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Определить жесткость k резиновой полоски можно, например, из следующих соображений. Действие избыточного давления Δp в трубке, изготовленной из того же листа резины, из которого вырезана полоска, должно уравновешиваться силами напряжения. Согласно закону Гука, линейная плотность напряжения, обусловленного увеличением радиуса трубки (т.е. напряжение в расчете на единицу длины трубки), равна

$$f = Eh\frac{2\pi(r + \Delta r) - 2\pi r}{2\pi r} = Eh\frac{\Delta r}{r},$$

где E – модуль Юнга, а h – толщина листа резины. С другой стороны, сила избыточного давления Δf, действующая на узкую полоску трубки единичной длины, равна $\Delta f = (r + \Delta r)\Delta\alpha\Delta p$, где $\Delta\alpha$ – центральный угол, под которым видны края этой полоски (рис.6). Написанное выражение справедливо для $\Delta\alpha \to 0$. Условие равновесия рассматриваемой полоски трубки можно записать в виде $\Delta f = 2f\sin(\Delta\alpha/2)$, или, учитывая, что $\Delta\alpha \to 0$, $\Delta f = f\Delta\alpha$. Подставляя в это соотношение найденные ранее выражения для Δf и f, получим

$$Eh = (1 + r/\Delta r)r\Delta p.$$

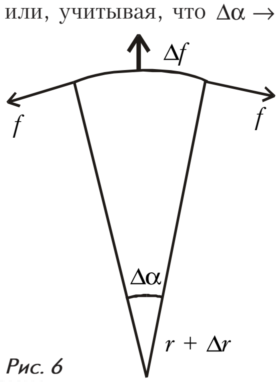

Рис. 6

Отсюда найдем жесткость полоски $k = Ebh/L$ и искомый период колебаний груза:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{(1 + r/\Delta r)rb\Delta p}}.$$

4. Поскольку гелий – одноатомный газ, его молярную массу будем считать неизменной. На первом и третьем участках цикла плотность гелия не изменяется; следовательно, объем гелия остается постоянным. На втором и четвертом участках должно оставаться неизменным давление гелия. Построенная pV-диаграмма заданного цикла показана на рисунке 7. Если считать, что давление газа на первом участке уменьшается

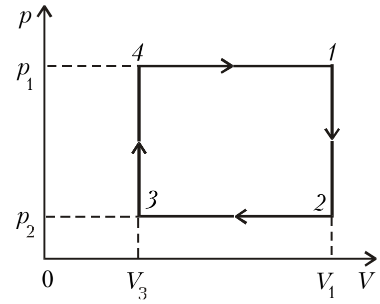

Рис. 7

в n раз, т.е. $p_1 = np_2$, и учесть, что температура гелия на втором участке уменьшается в k раз, т.е. $T_3 = T_2/k$, то, согласно уравнению Клапейрона–Менделеева, должны выполняться следующие соотношения:

$$p_1V_1 = RT_1 = np_2V_1 = nRT_2 = knRT_3 = knp_2V_3 = kp_1V_3 = kRT_4,$$

где R – универсальная газовая постоянная. Отсюда следует, что $T_1 = kT_4$. Учитывая, что при изобарическом нагревании молярная теплоемкость идеального одноатомного газа равна $2{,}5R$, определим искомое количество теплоты:

$$Q_{41} = 2{,}5R\left(T_1 - T_4\right) = 2{,}5RT_1\left(1 - 1/k\right).$$

5. Обозначим количество теплоты, которым обменивается газ с нагревателем или холодильником при переходе из точки i в точку j, через Q_{ij} и будем считать, что $Q_{ij} > 0$, если газ получает тепло, и $Q_{ij} < 0$, если он отдает тепло. На участках *2–3* и *4–1* цикла Карно изменение состояния газа происходит адиабатически, т.е. без теплообмена с окружающими телами. На участке *1–2* объем газа увеличивается изотермически; следовательно, на этом участке газ должен получать тепло от нагревателя. На участке *3–4* над газом совершается работа без изменения его внутренней энергии; следовательно, на этом участке газ должен отдавать тепло холодильнику. В первом цикле при переходе из точки *2* к точке *4* газ отдает тепло. Поэтому из первого закона термодинамики и определения КПД тепловой машины следует, что

$$\eta_1 = \frac{Q_{12} + Q_{34}}{Q_{12}}, \quad \eta_2 = \frac{Q_{12} + Q_{24}}{Q_{12}}.$$

Во втором цикле при переходе из точки *4* в точку *2* газ совершает работу и его внутренняя энергия увеличивается, поэтому КПД второго цикла равен

$$\eta_3 = \frac{Q_{42} + Q_{34}}{Q_{42}}.$$

Из первых двух соотношений следует, что

$$\frac{Q_{34}}{Q_{24}} = \frac{\eta_1 - 1}{\eta_2 - 1},$$

а третье соотношение можно представить в виде

$$\frac{Q_{34}}{Q_{42}} = \eta_3 - 1.$$

Поскольку $Q_{24} = -Q_{42}$, искомый КПД равен

$$\eta_3 = \frac{\eta_1 - \eta_2}{1 - \eta_2}.$$

6. Пусть, для определенности, заряд шариков положителен ($q > 0$) и $2b < L$. Тогда в положении устойчивого равновесия стержень должен располагаться по отношению к силовым линиям электрического поля так, как показано на рисунке 8 пунктирной линией, поскольку действие сил тяжести на шарики уравновешивается силами реакции стержня, а сам стержень закреплен на вертикальной оси. Сплошной линией на этом рисунке показано положение стержня после его отклонения на угол α. Будем считать, что на стержень и шарики силы трения не действуют. Если, как это обычно и делается,

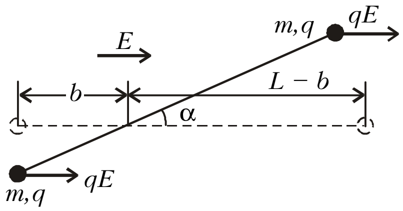

Рис. 8

не учитывать также потерь энергии, обусловленных ускоренным движением электрических зарядов, на основании закона изменения механической энергии можно утверждать, что кинетическая энергия системы при прохождении ею положения равновесия после отпускания без начального толчка равна работе электрических сил при перемещении заряженных шариков. Полагая стержень твердым телом (иное не оговорено в условии задачи), следует считать, что шарики имеют одинаковые угловые скорости. Учитывая, что стержень является невесомым, и пренебрегая размерами шариков по сравнению с их расстоянием до оси вращения, можно утверждать, что при угловой скорости ω стержень с шариками обладает кинетической энергией

$$W_к = \frac{m\omega^2\left(b^2 + (L-b)^2\right)}{2}.$$

Работа электрического поля при перемещении стержня из отклоненного положения в положение равновесия равна $A = qE(L-2b)(1-\cos\alpha)$. Рассуждая аналогично, можно показать, что при любом знаке заряда шариков и произвольном соотношении между L и b работу сил поля можно вычислить по формуле $A = |q|E|L-2b|(1-\cos\alpha)$. Учитывая, наконец, что линейная скорость точки, движущейся по окружности радиусом b с угловой скоростью ω, равна $v = \omega b$, определим искомую скорость:

$$v = b\sqrt{\frac{2|q|E|2b-L|(1-\cos\alpha)}{m\left(b^2+(L-b)^2\right)}}.$$

7. После первого переключения ключа K в положение *2* происходит заряд конденсаторов. Поскольку емкости конденсаторов одинаковы, первоначально они были полностью разряжены, а теперь подключены к источнику последовательно, установившееся напряжение на каждом из конденсаторов будет равно $\mathcal{E}/2$. При этом через источник пройдет заряд $q_1 = \mathcal{E}C/2$. Выделившееся на внутреннем сопротивлении источника количество теплоты можно вычислить на основании закона сохранения энергии, если, как это обычно и делается, пренебречь потерями энергии, связанными с излучением электромагнитной энергии. Действительно, энергия электрического поля, возникшего в конденсаторах после их зарядки, равна $W_э = 2q_1^2/(2C)$. При этом сторонние силы совершили работу $A_{ст} = \mathcal{E}q_1$. Часть этой работы была затрачена на создание электрического поля в конденсаторах, а другая равна количеству теплоты, выделившемуся в источнике. Таким образом, после первого переключения ключа в положение *2* на внутреннем сопротивлении источника должно выделиться количество теплоты

$$Q_1 = \mathcal{E}q_1 - \frac{q_1^2}{C}.$$

После переключения ключа в положение *1* начинается разряд соединенного с ним конденсатора. По истечении достаточно большого промежутка времени этот конденсатор должен полностью разрядиться через резистор R, а заряд другого конденсатора (как обычно, пренебрегаем токами утечки) должен остаться неизменным и равным q_1. После повторного перевода ключа в положение *2* конденсаторы вновь начнут заряжаться, при этом протекший через источник и каждый из конденсаторов заряд q_2 должен быть одним и тем же. Условие окончания заряда конденсаторов можно записать в виде

$$\frac{q_1+q_2}{C} + \frac{q_2}{C} = \mathcal{E},$$

а количество теплоты Q_2, выделившееся на внутреннем сопротивлении источника, должно удовлетворять соотношению

$$\mathcal{E}q_2 + \frac{q_1^2}{2C} = \frac{q_2^2}{2C} + Q_2 + \frac{(q_1+q_2)^2}{2C}.$$

Из составленных уравнений найдем искомое отношение количеств теплоты:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = 4.$$

8. После того как аккумулятор полностью зарядился, ни его ЭДС $\mathcal{E}_а$, ни его внутреннее сопротивление $r_а$ не должны изменяться при дальнейшем пропускании зарядного тока. Поэтому можно считать, что эти характеристики аккумулятора не зависят от времени. Если внутреннее сопротивление источника обозначить r, то, в соответствии с законом Ома для полной цепи, можно найти ток, текущий через аккумулятор:

$$I = \frac{\mathcal{E}-\mathcal{E}_а}{r+r_а}.$$

С другой стороны, согласно закону Фарадея для электролиза, сила тока должна удовлетворять соотношению

$$I = \frac{mFz}{M},$$

где $F \approx 96{,}5$ кКл/моль – число Фарадея, $z = 1$ – валентность и $M = 1$ г/моль – молярная масса атомарного водорода. Считая, что мощность, отдаваемая источником, затрачивается только на совершение работы против сторонних сил в аккумуляторе и выделение тепла в нем, запишем

$$N(r_а) = I^2 r_а + I\mathcal{E}_а, \text{ или } N(r_а) = \frac{(\mathcal{E}-\mathcal{E}_а)(\mathcal{E}r_а + \mathcal{E}_а r)}{(r+r_а)^2}.$$

Отдаваемая источником мощность будет максимальной, если

$$\frac{dN(r_а)}{dr_а} = 0.$$

Учитывая, что $r + r_а \neq 0$ и $\mathcal{E} \neq \mathcal{E}_а$, получим

$$\mathcal{E}(r+r_а) = 2(\mathcal{E}r_а + \mathcal{E}_а r), \text{ или } r_а = \frac{r(\mathcal{E}-2\mathcal{E}_а)}{\mathcal{E}}.$$

Используя это выражение и сравнивая два полученных соотношения для тока I, вычислим искомое внутренне сопротивление источника:

$$r = \frac{\mathcal{E}M}{2mFz} \approx 0{,}47\ \text{Ом}.$$

9. Пренебрегая магнитным потоком, пронизывающим материал проводников ротора, начало отсчета времени можно выбрать так, чтобы модуль потока магнитного поля, создаваемого обмотками статора, сцепленного с обмоткой ротора, был равен

$$|\Phi(t)| = |BSN\cos(\Omega-\omega)t|.$$

Тогда величина ЭДС, возникающей в обмотке, равна скорости изменения сцепленного с этой обмоткой потока внешнего магнитного поля, т.е.

$$|\mathcal{E}(t)| = |d\Phi/dt| = |BSN(\Omega-\omega)\sin(\Omega-\omega)t|.$$

Величина тока в обмотке ротора равна

$$|I(t)| = \frac{|\mathcal{E}(t)|}{R},$$

поэтому действующий на ротор момент сил со стороны магнитного поля равен

$$|M(t)| = |I(t)BSN\sin(\Omega-\omega)t| = \frac{(\Omega-\omega)(BSN\sin(\Omega-\omega)t)^2}{R}.$$

Поскольку скорость вращения ротора практически остается постоянной, можно утверждать, что величина искомого среднего тормозящего момента, действующего на ротор, равна

$$\left|M_{\text{торм}}\right| = \left|\left\langle M(t)\right\rangle\right| = \frac{B^2S^2N^2(\Omega-\omega)}{R}\left|\left\langle \sin^2(\Omega-\omega)t\right\rangle\right| = \frac{B^2S^2N^2(\Omega-\omega)}{2R}.$$

В этом соотношении угловыми скобками обозначена операция усреднения за время $2\pi/(\Omega-\omega)$ и учтено, что среднее значение квадрата гармонической функции за период равно $1/2$.

10. Согласно квантовой механике, световой пучок – это совокупность частиц, называемых фотонами. Эти частицы движутся в любой среде со скоростью света в вакууме c. Импульс фотона равен $p = \varepsilon/c$, где ε – энергия фотона. В соответствии с гипотезой де Бройля, любой материальный объект обладает волновыми свойствами, т.е. в ряде случаев его поведение может быть описано в рамках классических волновых представлений. При этом соответствующая объекту длина волны равна $\lambda = h/p$, где $h \approx 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж·с – постоянная Планка. Поскольку скорость электронов $v = 0{,}5$ км/с $\ll c \approx 3\cdot10^5$ км/с, можно не учитывать релятивистского изменения массы и считать, что их импульс (следовательно, и импульс падающих на линзу фотонов) равен $p = mv$, где $m \approx 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг – масса покоя электрона. Таким образом, можно считать, что длина волны падающего на линзу света равна $\lambda = h/(mv)$.

При падении на линзу свет частично отражается от ее поверхностей и после частичного прохождения через нее и отражения от стеклянной пластинки вновь падает на линзу. Очевидно, что интерференция может наблюдаться лишь между световыми пучками, отраженными от нижней сферической поверхности линзы и верхней плоскости пластины, на которой лежит линза. Учитывая, что радиус сферической поверхности достаточно велик, а номер интересующего кольца мал, можно считать, что угол ACO, под которым видно это кольцо из центра кривизны линзы (рис.9), столь мал, что, во-первых, синус и тангенс этого угла равны самому углу, измеренному в радианах, а во-вторых, можно пренебречь изменением направления распространения светового луча при прохождении сферической поверхности линзы. Пусть $\angle ACO = 2\alpha$, тогда $\angle AOB = \alpha$, $AO = 2R\sin(\alpha/2) = R\alpha$, $h_k = AO\sin\alpha = R\alpha^2$, $r_k = h_k/\operatorname{tg}\alpha = R\alpha$. Учитывая, что при отражении от более плотной среды фаза отраженной волны изменяется на противоположную, или, другими словами, происходит «потеря» половины длины волны, условие образования k-го светлого кольца имеет вид

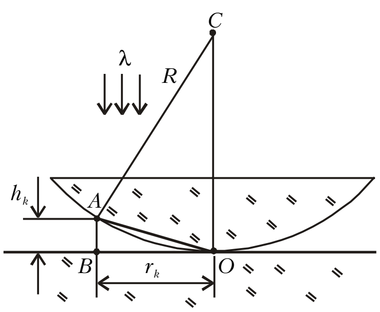

Рис. 9

$$\delta_k = 2h_k + \frac{\lambda}{2} = k\lambda.$$

Отсюда, с учетом ранее полученного соотношения для λ, находим искомый радиус k-го светлого кольца:

$$r_k = \sqrt{\frac{2k-1}{2}R\lambda} = \sqrt{\frac{2k-1}{2mv}Rh} \approx 1{,}05 \text{ мм}.$$

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $n_0 = \dfrac{n_1v_2 - n_2v_1}{v_2 - v_1} = 100\ \text{с}^{-1}$.

2. $v = \dfrac{v_0}{1-\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3v_0}{3-\sqrt3} \approx 2{,}36$ м/с.

3. $\beta = \pm\operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{\sin^2\alpha - 1/2}}{\cos\alpha}\right) = 0$. **4.** $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{h/R}}{1-\sqrt{h/R}} = 3$.

5. $p = p_{\text{а}}\left(\dfrac12 + \sqrt{\dfrac14 + \dfrac{\rho gL}{p_{\text{а}}}}\right) = 1{,}1\cdot10^5$ Па.

6. $T_2 = T_1\left(1 + \dfrac{2A}{3p_1V_1}\right) \approx 284$ К. **7.** $l = \dfrac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mg}} \approx 0{,}6$ м.

8. $\alpha = \dfrac{P_1}{P_2}\left(\dfrac{U^2 + P_2r}{U^2 + P_1r}\right)^2 = \dfrac98 = 1{,}125$.

9. $h = \dfrac{r}{(R-r)n}\sqrt{H^2 - (n^2-1)(R-r)^2} \approx 3{,}63$ м.

10. $x = \dfrac{f\Delta}{F} = 10$ мм.

Химический факультет

1. $x = l\rho_2/\rho_1 = 3{,}7$ см. **2.** $v_m = \pi v/2 = 6{,}3$ м/с.

3. $L = 4p_0/(3\rho g) = 1$ м. **4.** $\Delta T = (k^2-1)T = 132$ К.

5. $R = r\mathcal{E}_2/(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 0{,}2$ Ом.

6. $q = 2\pi r^2B/R = 1{,}6\cdot10^{-6}$ Кл.

7. $I = U_0\sqrt{C/(2L)} = 10^{-2}$ А. **8.** $x = 1{,}5F = 45$ см.

9. $k_{\max} = l/(N\lambda) = 8$.

10. $A = hc/\lambda - eU = 3{,}2\cdot10^{-19}$ Дж $= 2$ эВ.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.А.Васин, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.В.Родионова, М.М.Сумнина, П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:

117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати 142300 г.Чехов Московской области Заказ №