где φ — вспомогательный угол; поскольку

$$5\cos b + \sin b = \sqrt{26}\sin(b+\alpha),$$

где $\alpha = \arcsin\dfrac{5}{\sqrt{26}}$, получаем уравнение

$$\sqrt{27 + 2\sqrt{26}\sin(b+\alpha)}\sin(x+\varphi) = a. \qquad (*)$$

Поскольку $\sqrt{26} - 1 \le \sqrt{27 + 2\sqrt{26}\sin(b+\alpha)} \le \sqrt{26} + 1$, получаем, что при любом $|a| \le \sqrt{26} + 1$ найдется b, при котором уравнение $(*)$ имеет корни, а при $|a| \le \sqrt{26} - 1$ это уравнение имеет корни при всех b.

Вариант 8

1. -1. **2.** $\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; $\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

3. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi n}{3}$, $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 6 + \dfrac{\pi n}{3}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. 1000 л. **5.** $(2; 19/9) \cup (3; 2 + \sqrt{3})$.

6. 319. *Указание.* Воспользуйтесь подобием треугольников PMS и RQM.

7. $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(3 + \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10})$, $(3 - \sqrt{10}; -3 - \sqrt{10})$.

8. $a = 0$, $a = 1$. *Указание.* Уравнение преобразуется к виду

$$|x - 2a| + \frac{1}{|x - 2a|} + (x-1)^2 = 2,$$

откуда $|x - 2a| = 1$, $x = 1$.

Вариант 9

1. $\left(\dfrac{1}{3}; 3\right]$. **2.** 2.

3. 3. **4.** $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Левая часть уравнения не превосходит 2, а правая – не меньше, чем 2. Поэтому $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$, $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 0$.

5. $\sqrt{31}/6$.

6. $(15k^2 - 6k; 3k - 1)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Из условия следует, что $3x = (y+1)(5y-1)$. Поэтому либо $y + 1$, либо $5y - 1 = 5(y+1) - 6$ делится на 3. Отсюда следует, что $y = 3k - 1$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Вариант 10

1. $[-3; 1)$. **2.** $AB = AC = 2\sqrt{10}$. **3.** $\sqrt{3} - 2$.

4. а) И; б) Р. *Указание.* а) Выпишите последовательность букв, удовлетворяющую указанному правилу, и подсчитайте, какая из них чаще других встречается в периоде. б) Пусть a и b — цифры, с помощью которых записывается порядковый номер $\overline{ab}$ этой буквы. Цикл состоит из одной буквы, если и только если $2(a + b) = 10a + b$, т.е. $b = 8a$, откуда $a = 1$, $b = 8$.

5. 0. *Указание.* Левая часть неравенства не меньше двух. Правая – не больше двух, причем равенство достигается лишь при $x = 0$.

6. $(1; 5)$. *Указание.* Система $\sin(x+6) = 0$, $\sin\pi x = 0$ имеет единственное решение $x = -6$. Поэтому мы должны найти такие a, при которых уравнение не имеет других решений. Разделив уравнение на $\sin^2\pi x$ и выполнив замену $t = \dfrac{\sin(x+6)}{\sin\pi x}$, получим

$$t^2 - (a-1)t + (a-1) = 0. \qquad (*)$$

Уравнение $(*)$ не имеет корней при $1 < a < 5$, при этом исходное уравнение имеет единственное решение $x = -6$. При остальных значениях a уравнение имеет бесконечно много решений (докажите это).

Вариант 11

1. $x \in \left(\dfrac{1}{4}; 3\right) \cup \left[\dfrac{\sqrt{41}+7}{4}; \dfrac{7}{2}\right)$.

2. $k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\pi - \arcsin\dfrac{\sqrt{37}-1}{6} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3. $(17; 248)$. *Указание.* Выполните замену $p = \sqrt{x+8}$.

4. Пусть $K'L' = l$. В зависимости от положения точек K' и L' возможны случаи

а) $l = \sqrt{10}$, если $K' \in [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;

б) $l = \sqrt{346}$, если $K \notin [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$;

в) $l \in \left(\dfrac{\sqrt{634}}{5}; +\infty\right)$, если $K \notin [P'R']$, $L' \in [Q'S']$;

г) $l \in \left(\dfrac{\sqrt{8194}}{5}; +\infty\right)$, если $K' \in [P'R']$, $L' \notin [Q'S']$.

5. $c \in (3 - 2\sqrt{3}; -6 + 2\sqrt{15})$. **6.** $\dfrac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{r^2 - a^2/3}$.

7. 426 р. и 142 р. *Решение.* Обозначим через x, y, z количества акций вида A в начале дня у первого, второго и третьего брокера соответственно, а через p и q – цены на акции видов A и $Б$. Тогда из условия задачи следуют уравнения

$$\begin{cases} px + q(11-x) = 4402, \\ py + q(21-y) = 4402, \\ pz + q(29-z) = 4402, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (p-q)x + 11q = 4402, \\ (p-q)y + 21q = 4402, \\ (p-q)z + 29q = 4402. \end{cases}$$

Вычитая третье уравнение из первого и второго, получаем

$$(p-q)(x-z) = 18q, \quad (p-q)(y-z) = 8q. \qquad (*)$$

Поскольку по условию $p > q > 0$, то $x - z > 0$ и $y - z > 0$. После деления уравнений в $(*)$ имеем

$$\frac{x-z}{y-z} = \frac{9}{4}.$$

Используя целочисленность переменных, получаем $x = z + 9n$, $y = z + 4n$, где $n \in \boldsymbol{N}$. Так как $11 > x = z + 9n > z > 0$, то $z = 1$, $n = 1$. Поэтому $x = 10$, $y = 5$. Обращаясь к исходной системе, находим $p = 426$, $q = 142$.

Вариант 12

1. $(-17/5; 11/3)$. **2.** $\operatorname{tg}\dfrac{226\pi}{17}$. **3.** $\left[-\dfrac{7}{4}; -\dfrac{2}{3}\right) \cup \left[\dfrac{17+\sqrt{117}}{9}; 8\right)$.

4. $\dfrac{\pi}{8}(2n+1)$, $n = -1, 0, 1, 2$; $-\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{10}k$, $k = 1, 2, 3, 4$.

5. $\dfrac{2b+l}{c}$. *Указание.* Пусть BO – биссектриса угла B в треугольнике ABL, а $\angle ABO = \angle LBO = \beta$. Тогда

$$\frac{1}{2}AB \cdot BL\sin 2\beta = S_{ABL} = S_{ABO} + S_{LBO} = \frac{1}{2}AB \cdot BO\sin\beta + \frac{1}{2}BL \cdot BO\sin\beta = \frac{1}{2}(AB + BL) \cdot BO\sin\beta,$$

откуда

$$\frac{AB \cdot BL}{AB + BL} = \frac{BO}{2\cos\beta}.$$

Аналогично, из треугольника MBN имеем

$$\frac{MB \cdot BN}{MB + BN} = \frac{BO}{2\cos\beta},$$