Тогда $AC = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$ и $x^2 = 4\sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + x^2}$, откуда $SC = 5$, $AC = \frac{25}{4}$, $AH = \frac{9}{4}$.

Из равенства $AB^2 = BS^2 = BH \cdot BD$ следует, что $\frac{AB}{BH} = \frac{BD}{AB}$, а это значит, что треугольники AHB и DAB подобны. Поэтому $\angle ADB = \angle BAC$. Но $\angle BAC = \angle CDB$ как вписанные углы, поэтому BD – биссектриса угла D. По свойству биссектрисы $CD = AD \cdot \frac{CH}{AH} = 16/3$.

6. 2. *Указание.* После введения новых координат $z = y + x$, $a = y - x$ задача сводится к исследованию проекции параллельно прямой $a = \text{const}$ на прямую $z = 2$ множества, задаваемого неравенствами

$$a^2z^2 + 6az - z^2 + 6z - a + 1 < 0,\ z > 1.$$

Но это равносильно исследованию разрешимости системы неравенств $(a^2 - 1)z^2 + 6(a + 1)z - (a - 1) < 0$, $z > 1$ в зависимости от параметра a, что в свою очередь равносильно отысканию всех значений a, при которых квадратный трехчлен $f(z) = (a^2 - 1)z^2 + 6(a + 1)z - (a - 1)$ имеет хотя бы один корень, больший единицы.

Вариант 2

1. $\left[3; (11 + \sqrt{61})/2\right]$.

2. $(-\infty; -1) \cup \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$.

3. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

4. $\arccos\frac{3}{4}$. *Указание*. Пусть $FH = 2x$, $\angle BCA = \alpha$, FD – средняя линия треугольника ABC. Возможны 2 случая расположения точки H: на отрезке BE и на отрезке AE. Из теоремы синусов для треугольника FGH получим уравнение $2\sin 2\alpha = 3\sin\alpha$.

5. $\frac{9}{4} + 4n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание*. Вычитая из первого уравнения системы второе, получим, что

$$(\cos\pi xy - 1)^2 + \sin^2\pi x + \sin^2\pi y = 0,$$

откуда следует, что x и y – целые числа, причем одно из них четно. Кроме того, $x^2 + y^2 < 1 + 4\sin^2\left(\frac{\pi\alpha}{4} - \frac{\pi}{16}\right) < 5$.

Поэтому решениями данной системы могут быть только пары (0; 1), (0; –1), (1; 0), (–1; 0), (2; 0), (–2; 0), (0; 2), (0; –2). А так как если (x_0, y_0) – решение, то $(-x_0, -y_0)$ – тоже решение, необходимо найти все α, при которых система имеет ровно два решения из четырех: (0; 1), (1; 0), (2; 0), (0; 2).

6. 48. *Указание.* Пусть O – центр сферы. Докажите, что DO – перпендикуляр к плоскости ABC, пересекающий ее в точке E – центре вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите затем, что треугольники ADL, KDB и MDC – прямоугольные, и найдите их углы, после чего выразите через $DK = DM = DL = h$ полупериметр p и площадь S треугольника ABC. Далее, пользуясь формулой Герона и тем, что $S = rp$, где r – радиус вписанной в треугольник ABC окружности, выразите через h величину $ER = r$, а затем и $DE = H$ – высоту пирамиды. Теперь осталось из прямоугольного треугольника DKO найти h (по условию $OK = 3$), вычислить S, а затем и искомый объем.

Вариант 3

1. $\left(-\frac{9 + \sqrt{57}}{4}; -2\right) \cup (-2; -1) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

2. $(-1; 0) \cup [1; 5)$.

3. $\pi \pm \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Поскольку $\cos x \neq 0$, разделив левую часть на $\cos^3 x$, получаем, что

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg}^2 x + 12 = 0 \text{ при } \sin x \geq 0 \text{ и}$$

$$\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 12 = 0 \text{ при } \sin x < 0.$$

Дальнейшее ясно.

4. 216. *Указание.* Пусть M – середина AB, L – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на ребро SC. В треугольнике MSC точка D – основание высоты, $\angle SMD = \frac{\pi}{6}$; пусть $MD = x$, тогда $DC = 2x$. Выразите через x отрезки SK, SD, а затем из подобия треугольников SKL и SDC найдите x.

5. $(-\infty; -\sqrt{13}] \cup \left[\frac{11}{3}; \infty\right)$. *Указание.* Решения первого неравенства образуют отрезок $-1 \leq y \leq 3$. Поскольку второе неравенство имеет вид $f(x) \geq g(y)$ (через f и g обозначены левая и правая части соответственно), задачу можно переформулировать так: при каких a наибольшее значение функции f не меньше наименьшего значения функции g. Пусть $t = \arcsin x$, тогда

$$f(x) = \sqrt{a^2 - 16 + h(t)}, \text{ где } h(t) = -\frac{4}{\pi^2}t^2 - \frac{2}{\pi}t + \frac{6}{\pi}|t|.$$

Нетрудно найти $\max\limits_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} h(t) = h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 3$. Поэтому $\max\limits_{-1 \leq x \leq 1} f(x) = \sqrt{a^2 - 13}$.

Минимум правой части зависит от положения вершины параболы $y_в = -a$ относительно отрезка [–1; 3]. Рассмотрев три возможных случая $y_в < -1$; $-1 \leq y_в \leq 3$ и $y_в \geq 3$, получаем ответ.

6. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2} + 2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$. *Решение.* Пусть AK, CL – высоты ΔABC; N, E – точки пересечения прямой AO с BC и описанной окружностью (радиусом R) соответственно. Так как $AC < AD$, то $\angle ADC < \angle ACD < \frac{\pi}{2}$, следовательно, ΔADC – остроугольный, поэтому точка K лежит между D и C. Тогда из условия следует, что N лежит между B и D. $\angle CAH = \angle OAB = \alpha$ (так как $\angle ACB = \angle AEB$ – вписанные, опирающиеся на одну дугу, и $\angle AKC = \angle ABE = \frac{\pi}{2}$). Так как AD – биссектриса, то $\angle KAD = \angle DAO = \beta$. Таким образом, $\angle CAB = 2\alpha + 2\beta$; $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \alpha$; $\angle CBA = \frac{\pi}{2} - \alpha - 2\beta$. Пусть M – точка, симметричная H относительно AB. Тогда M лежит на описанной окружности. Действительно, $\angle AHB = \angle AMB$, а $\angle AHB + \angle ACB = \pi$. Далее, $AH = AO$ (так как AD – биссектриса и медиана в ΔAHO). Но $AH = AM$, значит, $AM = AO$. Следовательно, $AM = R$. Отсюда $\angle ACM = \frac{\pi}{6}$ (как вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу). Так как ΔACL – прямоугольный, $\angle CAB = \frac{\pi}{3}$, то $\angle CAD = \frac{\pi}{6}$. По теореме косинусов из ΔACD:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos\frac{\pi}{6} = 4 - 2\sqrt{2}.$$