вен разности двух векторов, ведущих из центра многоугольника в соответствующие вершины. Поэтому сумма всех 999 векторов равна разности суммы векторов, ведущих из центра в четные вершины, и аналогичной суммы для нечетных вершин. Четные и нечетные вершины по отдельности образуют правильные 999-угольники, а сумма векторов, ведущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулю (так как она не меняется при повороте на угол $2\pi/999$). Значит, сумма векторов, нарисованных на отрезках, равна нулю как разность двух нулевых векторов.

10. Сумма векторов с началом в точке P и концами в вершинах n-угольника равна

$$\vec{PA_1}+\vec{PA_2}+\ldots+\vec{PA_n}=\left(\vec{PO}+\vec{OA_1}\right)+\left(\vec{PO}+\vec{OA_2}\right)+\ldots+\left(\vec{PO}+\vec{OA_n}\right)=n\vec{PO}+\left(\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+\ldots+\vec{OA_n}\right)=n\vec{PO}.$$

13. в) $PA_1+PA_5+PA_9=PA_3+PA_7+PA_{11}$ и $PA_2+PA_6+PA_{10}=PA_4+PA_8+PA_{12}$.

14. Сложив равенства

$$\begin{aligned}
&AX\cdot BC+CX\cdot AB = BX\cdot AC,\\
&CX\cdot BD = BX\cdot CD+DX\cdot BC,\\
&CX\cdot DE+EX\cdot CD = DX\cdot CE,\\
&AX\cdot DE+EX\cdot AD = DX\cdot AE,\\
&AX\cdot BE+EX\cdot AB = BX\cdot AE,
\end{aligned}$$

получим

$$AX(2a+d)+CX(2a+d)+EX(2a+d)=BX(2a+d)+DX(2a+d),$$

где a – сторона пятиугольника, d – его диагональ. Разделив на $2a+d$, получим утверждение задачи 3.

ВОЛШЕБНАЯ ЛИНЗА

1. $CF_1=R/(n-1)$.

3. $F=\dfrac{R}{2}\dfrac{(2n_2-n_1)}{(n_1-n_2)}\dfrac{1}{n_2}$, при $2n_2<n_1$ фокус находится внутри шара.

4. Многим сразу приходит на ум использовать для этой цели дополнительно сильную рассеивающую линзу, расположив ее соосно с исследуемой линзой на небольшом расстоянии от ее поверхности. Как и в случае с водой, предмет, находящийся в фокусе «волшебной» линзы, становится хорошо наблюдаемым. Это верное решение. Однако можно с успехом воспользоваться также и короткофокусной собирающей линзой. Только в этом случае изображение объекта будет перевернутым.

5. Оргстекло (плексиглас, полиметилметакрилат) – материал, плохо смачиваемый водой. Поэтому требуется создать избыточное давление порядка $\Delta p=\sigma/d$, чтобы «загнать» воду в узкий зазор со стенками из оргстекла (здесь σ – коэффициент поверхностного натяжения, d – величина воздушного зазора).

ОБ АМПЛИТУДАХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

1. Амплитуда колебаний скорости будет максимальной, если действие силы прекращается в момент прохождения грузом смещенного положения равновесия $\Delta L=F/k$, т.е. $\tau=T/4+nT/2=(0{,}052+n\cdot 0{,}1)$ с, где $n=1, 2, 3, \ldots$ и $T=2\pi\sqrt{m/k}\approx 0{,}21$ с.

2. $V=\dfrac{m_1}{m_2}\dfrac{2\pi X}{T}$. **3.** $m_2=\dfrac{4\pi^2X}{T^2g}m_1$.

4. $T=2\pi\sqrt{\dfrac{100\%}{\delta}\dfrac{3\Delta L}{g}}\approx 2{,}6$ с. **5.** $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m_1}{m_1+m_2}\dfrac{L}{g}}$.

6. $\omega=\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\approx 1{,}18\cdot 10^{14}$ с$^{-1}$, где $k=2\dfrac{U(r)-U(r_0)}{(r-r_0)^2}$, $r_0=0{,}11$ нм; $X_1=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3h\omega}{2\pi k}}\approx 0{,}76\cdot 10^{-11}$ м.

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\pm\dfrac{11\pi}{12}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}4t^2+2\left(\sqrt{3}+1\right)t+\sqrt{3}=0,\\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\le 0,\\ t=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).\end{cases}$$

2. $(-4;1)\cup(1;5/3)\cup(5/3;11)$. *Указание.* Поскольку выражение $|a|-|b|$ имеет тот же знак, что и a^2-b^2, а знак выражения $\log_2 u-\log_2 v$ совпадает со знаком $u-v$ при $u>0$ и $v>0$, неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\dfrac{(2x+8)-(13-x)}{\left(x^2+2x-3\right)^2-\left(2x^2-10x+8\right)^2}\ge 0,\\ 2x+8>0,\\ 13-x>0.\end{cases}$$

3. 22. *Указание.* Пусть A' – точка, симметричная точке A относительно серединного перпендикуляра к отрезку BE, а D' – точка, симметричная точке D относительно серединного перпендикуляра к отрезку CE. Четырехугольник $A'BCD'$ – параллелограмм, точка E лежит на $A'D'$, а площадь его равна площади $ABCDE$.

4. $k\in\left(\dfrac{1+\mathrm{tg}^2\frac{1}{3}}{2};1\right]$. *Указание.* Система

$$\begin{cases}y=-\dfrac{2}{3}-\arcsin x,\\ y=-\dfrac{2}{3}-2\,\mathrm{arctg}\,kx,\\ y>0\end{cases}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда уравнение $k\sin\alpha=\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, где $\alpha=-y-\dfrac{2}{3}$, имеет решение на промежутке $-\dfrac{\pi}{2}\le\alpha<-\dfrac{2}{3}$.

5. 5; 16/3. *Указание.* Поскольку центр сферы лежит в плоскости ABC, а плоскости DSB и ASC перпендикулярны плоскости ABC, $\angle DSB=\angle ASC=90°$. Треугольник ASC прямоугольный, поэтому $SC^2=HC\cdot AC$. Пусть $SC=x$.