М1650*. *На плоскости нарисован граф без циклов Г. Известно, что граф Г′, полученный из Г параллельным переносом на вектор (1, 0), не пересекается с Г. На графе Г отмечены две различные точки А и В, в которых в начальный момент времени сидели два жука. Ползая по графу, жуки через некоторое время снова оказались в точках А и В, но при этом поменялись местами. Докажите, что в некоторый момент времени расстояние между жуками было меньше 1.*

Итак, пусть жуки образуют пару (x, y), т.е. первый находится в точке x, второй – в точке y. Нам надо доказать, что, двигая жуков, как указано в задаче, мы не можем из пары (x, y) получить пару (y, x). Для этого мы придумаем такую функцию от x, y, что она непрерывна по x и y, для всех разрешенных положений x и y она не равна нулю, и если для пары (x, y) она больше нуля, то для пары (y, x) – меньше. Тогда, очевидно, из пары (x, y) нельзя получить пару (y, x).

Построим требуемую функцию. Нарисуем на плоскости графы Г и Г′ (перенос графа Г на вектор $\vec{a}$). Представим себе, что из x в y по графу Г проползла жужелица, а из y' в x' по графу Г′ одновременно с жужелицей прополз таракан. Посмотрим, на какой угол при этом повернулся вектор $\vec{ЖТ}$ (угол считаем ориентированным: угол поворота корректно определен, поскольку вектор $\vec{ЖТ}$ всегда не ноль). Можно показать, что величина этого угла зависит только от точек x и y, т.е. не зависит от конкретного способа, которым ползли жужелица и таракан.

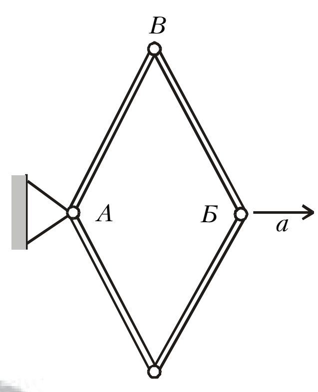
Докажем, что указанный угол непрерывно зависит от x и y. В самом деле, возьмем точку x_1 и представим себе, что жужелица сначала проползла из x_1 в x, таракан при этом стоял, а потом жужелица проползла их x в y, а таракан – из y' в x'. Поворот вектора $\vec{ЖТ}$ на первом этапе непрерывно зависит от x_1. Аналогичное рассуждение подходит и для y.

Теперь докажем, что если расстояние между x и y больше 1, то поворот вектора не равен нулю. В самом деле, точки x, y, y', x' образуют параллелограмм, следовательно, если векторы $\vec{xy'}$ и $\vec{yx'}$ сонаправлены, имеем $\vec{xy'} = \vec{xy} + \vec{a}$, $\vec{yx'} = -\vec{xy} + \vec{a}$, значит, $\vec{xy}$ должен быть коллинеарен с $\vec{a}$ и меньше $\vec{a}$ по модулю.

Доказательство завершено.

А.Скопенков, Г.Челноков

Ф1658. *Из четырех одинаковых тонких стержней длиной L каждый сделали ромб, скрепив их концы шарнирно (см. рисунок). Шарнир А закреплен, противоположный шарнир Б двигают вдоль диагонали ромба с постоянным ускорением a. Вначале упомянутые противоположные вершины находятся близко друг к другу, а скорость точки Б равна нулю. Какое ускорение будет иметь шарнир В в тот момент, когда стержни АВ и ВБ составят угол 2α? Считайте движение всех точек плоским.*



Ускорение точки B по горизонтали – в направлении движения шарнира $Б$ – равно половине ускорения этого шарнира, т.е. $0{,}5\,a$. Обозначим вертикальную составляющую ускорения шарнира B буквой b. Если мы найдем эту величину, задача будет практически решена.

Для нахождения величины b заметим, что точка B движется по окружности радиусом L, и мы можем воспользоваться формулой для центростремительного ускорения. Но для этого нужно знать скорость точки B в интересующий нас момент времени. Найдем вначале скорость точки $Б$: длина пройденного этой точкой пути равна $2L\sin\alpha = a\tau^2/2$, откуда $v_Б = a\tau = \sqrt{4aL\sin\alpha}$. Скорость точки B – обозначим ее величину через u – перпендикулярна стержню AB, а ее горизонтальная составляющая $(u\cos\alpha)$ равна $0{,}5v_Б = 0{,}5\sqrt{4aL\sin\alpha} = \sqrt{aL\sin\alpha}$. Отсюда получаем

$$u = \frac{\sqrt{aL\sin\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Для нахождения величины b используем центростремительную составляющую ускорения точки B:

$$b\cos\alpha - \frac{1}{2}a\sin\alpha = \frac{u^2}{L} = \frac{aL\sin\alpha}{L\cos^2\alpha},$$

откуда

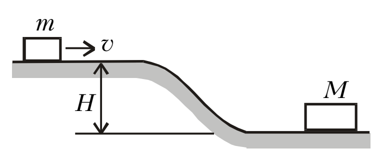
$$b = a\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\operatorname{tg}\alpha = a\left(\frac{3}{2} + \operatorname{tg}^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Мы нашли обе составляющие ускорения шарнира B. Его полное ускорение равно

$$a_B = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

З.Рафаилов

Ф1659. *Тележка массой m движется по горизонтально расположенным рельсам со скоростью v (см. рисунок). Рельсы дальше идут вниз и плавно переходят в новый горизонтальный участок, находящийся на H ниже. Тележка наезжает на неподвижный вагон массой M, стоящий на нижнем горизонтальном участке, и между тележкой и вагоном происходит абсолютно упругий удар. При какой начальной скорости v тележка после удара вновь сможет подняться на верхний горизонтальный участок? Трение отсутствует.*



Скорость спустившейся тележки найдем из закона сохранения энергии: $u_1 = \sqrt{v^2 + 2gH}$. Для того чтобы подняться обратно на горку, тележка должна иметь в направлении горки скорость не меньшую чем $u_2 = \sqrt{2gH}$. Это возможно только в том случае, когда масса налетающей тележки меньше массы неподвижного вагона, – в противном случае оба тела после упругого удара будут удаляться от горки.

Рассмотрим граничный случай – скорость тележки наверху равна минимально необходимой для выполнения условия задачи. Тогда скорость тележки после удара в точности равна u_2. Из закона сохранения импульса найдем