было очень непривычно, оно противоречило физической интуиции, выработанной на протяжении последних трех веков.

Математические корни специальной теории относительности были вскрыты выдающимся немецким математиком Германом Минковским. Им была установлена поразительная связь специальной теории относительности с геометрией Лобачевского.

Проиллюстрируем эту мысль. Пусть два самолета движутся навстречу друг другу, и один летит с постоянной скоростью v (относительно Земли), а другой – со скоростью v' (относительно нее же). Согласно ньютоновской механике, скорость второго самолета относительно первого равна $v + v'$, а специальная теория относительности приводит к другой формуле: $\dfrac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}}$, где c – скорость света. Если бы самолеты летели в одной плоскости, а не вдоль одной прямой, то формула сложения скоростей оказалась бы связанной с преобразованием плоскости Лобачевского. Кратко можно сказать так: *пространство скоростей в специальной теории относительности реализуется, как плоскость Лобачевского, где формула сложения скоростей определяется с помощью движения этой плоскости.* [3]

При этом выяснилось, что время и пространство нельзя рассматривать изолированно, что наш мир *четырехмерен.* В итоге многомерная геометрия приобрела физический смысл.

Это стало вдохновляющим событием для математиков: теории, представлявшиеся многим абсурдной заумью, вдруг оказались у оснований всего мироздания.

Через десять лет Эйнштейн создает общую теорию относительности, где рушит представления о «плоском» мире. Геометрия мира оказывается «искривленной» и связанной с тяготением. Показания приборов, совершивших путь из одной точки в другую, как оказалось, должны зависеть от траектории движения. В основании этого явления лежит одно из важнейших понятий геометрии – *связность*, которая определяет параллельное перенесение на искривленных поверхностях. Это понятие было предметом изучения геометров итальянской школы начала века (Леви-Чивита и др.).

Все это повлекло за собой интенсивнейшее развитие геометрии в двадцатые и тридцатые годы (и топологии – в наше время).

В двадцатые годы человечество ожидал еще один шок – рождение квантовой механики. Рушился один из незыблемейших бастионов научного миросознания прошлого – предсказуемость будущего по прошлому. Выяснилось, что микромир принципиально непредсказуем, что можно определить лишь *вероятность* появления электрона на определенном месте экрана, расположенного за отверстием, через которое этот электрон пропускается. Это казалось невероятным даже для такого величайшего ученого и одного из основоположников квантовой теории, как Эйнштейн. «Я не верю в Бога, играющего в кости», – не уставал повторять он.

Постараемся пояснить, какая математика стоит за всем этим. В классической механике движение материальной частицы характеризуется ее координатой x и значением ее импульса p. Считается, что их можно вычислить одновременно и дальнейшее движение однозначно определяется дифференциальным уравнением.

В квантовой механике положение материальной частицы определяется волновой (комплексной) функцией $X(x)$, принадлежащей гильбертову пространству L_2 на прямой. Эта функция удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|X(x)\right|^2 dx = 1$ и определяет вероятность $\mathrm{P}_X([a,b])$ нахождения частицы (в данный момент времени) в промежутке $[a, b]$ по формуле

$$\mathrm{P}_X([a,b]) = \int_a^b \left|X(x)\right|^2 dx .$$

Импульс характеризуется другой функцией $P(p)$. Она также определена на всей прямой и удовлетворяет условию $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|P(p)\right|^2 dp = 1$. Вероятность $\mathrm{P}_P([\alpha,\beta])$ того, что импульс частицы находится в пределах $\alpha \le p \le \beta$, задается равенством

$$\mathrm{P}_P([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \left|P(p)\right|^2 dp .$$

Движение частицы определяется уравнением с частными производными – *уравнением Шредингера.*

Одним из важнейших положений квантовой механики является связь волновой функции и функции импульса посредством *преобразования Фурье*, что выражается формулой

$$P(p) = (2\pi\hbar)^{-1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} X(x)e^{-i\frac{p}{\hbar}x}dx \qquad (3)$$

($\hbar$ – постоянная Планка). Наиболее вероятные значения положения частиц и величины импульса (их средние значения) задаются формулами

$$\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left|X(x)\right|^2 dx,\quad \eta = \int_{-\infty}^{+\infty} p\left|P(p)\right|^2 dp,$$

а если считать, что эти средние равны нулю, то разброс координаты и импульса задается равенствами

$$D_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left|X(x)\right|^2 dx ,$$

$$D_P^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} p^2\left|P(p)\right|^2 dp .$$

Из соотношения (3) выводится неравенство $D_X^2 D_P^2 \ge \dfrac{\hbar^2}{4}$, называемое *принципом неопределенности Гейзенберга* и выражающее тот факт, что мы не можем точно знать одновременно и положение материальной частицы, и ее импульс. С этим рухнула надежда на детерминизм и познаваемость микромира.

(Так случилось, что математические основания квантовой механики были созданы Гильбертом и его последователями незадолго до рождения самой науки. В частности, равносильность двух подходов к описанию микромира Гейзенберга и Шредингера была достаточно быстро установлена благодаря тому, что один из активных участников построения новой науки, Макс Борн, незадолго до того слушал лекции Гильберта по основам функционального анализа и теории бесконечномерных квадратичных форм.)

А вот еще один сюжет.

Когда английский ботаник Броун обнаружил под микроскопом хаоти-

---

[3] Объяснению смысла этой фразы и многим другим связям специальной теории относительности и геометрии Лобачевского посвящена книга В.Н.Дубровского, Я.А.Смородинского и Е.Л.Суркова «Релятивистский мир» (М.: Наука, 1984, серия «Библиотечка «Квант», вып.34).