Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Можно ли так расставить по кругу все целые числа от -7 до 7, чтобы у каждого числа произведение двух его соседей было неотрицательным?

(7, Ю.Базлов) [1]

2. а) Докажите, что в любом шестидесятизначном числе, среди цифр которого нет нулей, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 1001.

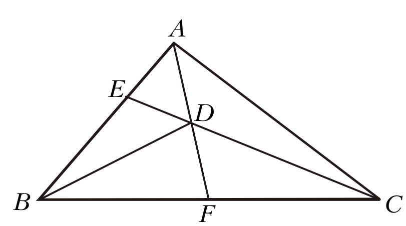
(7)

б) Докажите, что в любом тридцатипятизначном числе, среди цифр которого нет нулей и пятерок, можно вычеркнуть несколько цифр так, чтобы полученное число делилось на 41.

(11, жюри)

3. AF – медиана треугольника ABC, D – середина отрезка AF, E – точка пересечения прямой CD со стороной AB (см. рисунок). Докажите, что если $BD = BF$, то $AE = DE$.

(8, С. Берлов)



4. Найдите наименьшее положительное число x, удовлетворяющее неравенству $[x] \cdot \{x\} \geq 3$. (Как обычно, $[x]$ и $\{x\} = x - [x]$ – целая и дробная части числа x.)

(9, А.Храбров)

5. Параллельная стороне BC треугольника ABC прямая пересекает прямые AB и AC в точках K и L. Перпендикуляры, восставленные в точках K и L к прямым AB и AC, пересекаются в

---

[1] *В скобках после условий указаны класс, которому предлагалась задача, и автор.*

точке M. Докажите, что точки A, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

(9, А.Храбров)

6. Уравнение $f(x)=10$, где f – многочлен с вещественными коэффициентами, имеет ровно 10 вещественных корней, а уравнение $f(x)=15$ имеет ровно 15 вещественных корней. Докажите, что хотя бы один из корней этих уравнений удовлетворяет уравнению $f'(x)=0$.

(11, К.Кохась)

Второй (городской) тур

7. Пятизначное число назовем неразложимым, если оно не представляется в виде произведения двух трехзначных чисел. Какое наибольшее число неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?

(6, С.Берлов)

8. Через клетчатый квадрат 100×100 проведено по линиям сетки несколько прямых. Образовавшиеся прямоугольные части раскрашены в шахматном порядке в синий и красный цвета. Докажите, что количество синих клеточек четно.

(7, С. Иванов)

9. Несколько служащих получили одинаковую зарплату. После этого время от времени кто-нибудь брал часть своих денег и раздавал их поровну остальным. После нескольких таких операций у одного из служащих оказалось 24 копейки, а еще у одного – 17 копеек. Сколько было служащих?

(7, Р.Исмаилов)

10. По кругу как-то расставили числа от 1 до 30. Стоящие на соседних местах числа можно менять местами. После нескольких таких операций каждое число перешло на диаметрально противоположное место. Докажите, что в некоторый момент меняли местами числа, сумма которых равна 31.

(8, С. Берлов)

11. Дана последовательность натуральных чисел a_n, в которой при всех n выполняется соотношение

$$a_{n+2}=\text{НОД}\left(a_n,a_{n+1}\right)+1.$$

Может ли эта последовательность содержать более 1998 различных чисел?

(8, С.Берлов)

12. В лагерь приехало несколько школьников. У каждого из них не больше 30 знакомых среди приехавших. Докажите, что школьников можно расселить в 60 комнат так, чтобы никакие двое знакомых не оказались в одной комнате и при этом не было бы школьника, у которого больше одного знакомого и все они живут в одной комнате.

(8, Д.Карпов)

13. В остроугольном треугольнике ABC точка M – середина стороны BC. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – высоты. Прямые AB и A_1B_1 пересекаются в точке X, а прямые MC_1 и AC – в точке Y. Докажите, что $XY\parallel BC$.

(9, Д. Ростовский)

14. Числа a, b, c удовлетворяют равенству

$$\max(a,b)+\max(c,1997)=\min(a,c)+\min(b,1998).$$

Докажите, что $b\ge c$.

(10, А. Храбров)

15. O – центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Прямая BO вторично пересекает описанную окружность в точке D, а продолжение высоты, опущенной из вершины A, пересекает окружность в точке E. Докажите, что площадь четырехугольника $BECD$ равна площади треугольника ABC.

(10, М.Пратусевич)

16. Город расположен на нескольких островах, соединенных между собой мостами. При поездках по городу жители выражают длину своего пути числом мостов, которые им приходится переезжать. После того как один из мостов закрыли на ремонт, каждый горожанин заявил: «У меня есть друг, кратчайший путь к которому содержит теперь ровно на один мост больше, чем раньше» . Докажите, что хотя бы один из островов – необитаемый.

(10, Ф.Назаров)

17. Две плоскости делят куб на четыре части равного объема. Докажите, что и поверхность куба они делят на четыре части одинаковой площади.

(11, М.Гусаров)

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Окружность, описанная вокруг треугольника ABO, пересекает сторону AD в точке E. Окружность, описанная вокруг треугольника DOE, пересекает отрезок BE в точке F. Докажите, что $\angle BCA=\angle FCD$.

(9, С. Берлов)

19. На листе клетчатой бумаги нарисовали многоугольник так, что внутри него оказалось более 90 узлов, а ни на сторонах, ни в вершинах нет ни одного узла. Докажите, что стороны многоугольника пересекают линии сетки по крайней мере в 40 точках.

(9, С.Иванов)

20. Докажите, что проекции точки пересечения диагоналей вписанного четырехугольника на две его противоположные стороны симметричны относительно прямой, соединяющей середины двух других сторон.

(9, С.Берлов)

21. На каждом из 10 листов бумаги написано несколько степеней двойки. Суммы чисел на всех листах одинаковы. Докажите, что какая-то из степеней двойки встречается на этих листах не менее 6 раз.

(10, С.Иванов)

22. В стране 1998 городов. Любые два города соединены авиалинией. Цены билетов на всех авиалиниях различны. Могут ли все круговые маршруты (проходящие через каждый город по одному разу и возвращающиеся в исходный пункт) иметь одинаковую стоимость?

(10, К.Кохась)

23. Окружность, проходящая через вершины A и C треугольника ABC, пересекает сторону AB в ее середине D, а сторону BC – в точке E. Окружность, проходящая через точку E и касающаяся в точке C прямой AC, пересекает прямую DE в точке F. K – точка пересечения прямых AC и DE. Докажите, что прямые CF, AE и BK пересекаются в одной точке.

(11, С.Берлов)

24. Найдите все такие многочлены $P(x,y)$ от двух переменных, что $P(x+y,\ y-x)=P(x,y)$ при любых x и y.

(11, А.Голованов)

25. В окружность с центром O и радиусом 1 вписан $2n$-угольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Докажите, что

$$\left|\vec{A_1A_2}+\vec{A_3A_4}+\ldots+\vec{A_{2n-1}A_{2n}}\right|\le$$

$$\le 2\sin\left(\left(\angle A_1OA_2+\ldots+\angle A_{2n-1}OA_{2n}\right)/2\right).$$

(11, Ю.Базлов)

26. Пусть $\tau(n)$ обозначает количество натуральных делителей числа n. Докажите, что последовательность $\tau\left(n^2+1\right)$ ни с какого места не становится строго возрастающей.

(11, А. Голованов)

Публикацию подготовили
В.Сендеров, А.Спивак