## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» №5)*

**1.** Заднее колесо трактора за секунду совершит ровно один оборот.

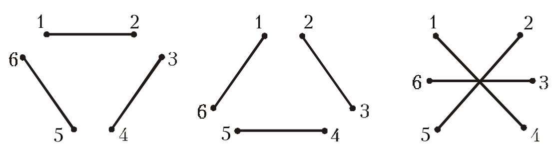
**2.** См. таблицу:

| | 7«А» | 7«Б» | 7«В» | 7«Г» | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7«А» | | 3:0 | 2:1 | 2:0 | 7:1 |
| 7«Б» | 0:3 | | 0:0 | 2:0 | 2:3 |
| 7«В» | 1:2 | 0:0 | | 2:1 | 3:3 |
| 7«Г» | 0:2 | 0:2 | 1:2 | | 1:6 |

**3.** Обозначим угол $AOB$ через $\alpha$, тогда $\angle AOD = \frac{\alpha}{2}$, а $\angle DOC = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Угол $COB$ равен $\alpha - \frac{\pi}{2}$, а $\angle COE = \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$.

**4.** Разобьем гирьки на 50 пар соседних гирек. Затем эти 50 пар разобьем на две кучки по 25 пар. Теперь из первой кучки положим на левую чашку весов более тяжелую гирьку из каждой пары, а на правую – более легкую. Со второй кучкой поступим наоборот – на левую чашку положим более легкие гирьки из пар, а на правую – более тяжелые. Очевидно, что в результате весы окажутся в равновесии.

**5.** Судья не всегда сможет сделать расписание на оставшиеся 2 дня. Например, если в первые три дня команды играли



1-й день 2-й день 3-й день

Рис. 1

так, как показано на рисунке 1 (отрезками соединены номера команд, играющих в этот день), невозможно было бы устроить расписание даже только на четвертый день. Действительно, команда с нечетным номером может играть лишь с командами, имеющими нечетные номера, но таких команд три, следовательно, одной из них не с кем будет играть в четвертый

*(см. «Квант» №6)*

**1.** Смогут. Поскольку Буратино не хватает 18 сольдо, а Мальвине не хватает 7 сольдо, у Мальвины есть по крайней мере 18 – 7 = 11 сольдо. Если она добавит их к деньгам Пьеро, то денег на букварь, конечно же, хватит.

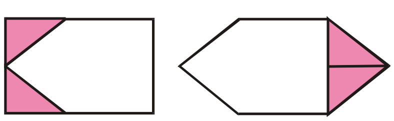


Рис. 2

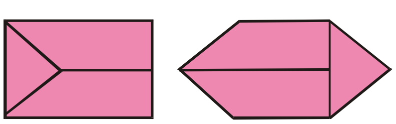


Рис. 3

**2.** См. рис. 2, 3.

**3.** Число 220 нельзя представить в виде суммы двух натуральных чисел, все цифры которых нечетны.

**4.** 1665. Сумма последних цифр трех исходных трехзначных чисел оканчивается на 5. Числа 5 и 25 не представимы в виде суммы трех ненулевых различных цифр. Значит, сумма последних цифр равна 15. Тогда, сумма средних цифр тоже равна 15, и сумма первых цифр тоже 15. Теперь ясно, что после перестановки мы получим три числа, сумма которых 1665. Напоследок предъявим тройку чисел (одну из возможных), которая удовлетворяет условию задачи: 159, 672, 834.

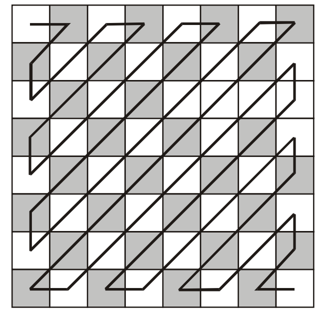


Рис. 4

**5.** На рисунке 4 король сделал 49 диагональных ходов. Доказать, что число 49 максимально возможное, очень просто. Каждый диагональный ход проходит через один узел шахматной доски. (Узлом мы здесь называем общую точку 4 клеток шахматной доски.) Всего узлов 49. Два раза пройти через один и тот же узел без самопересечения пути невозможно.

## МЕТАМОРФОЗЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

**1.** $\Pi_9$, $\Pi_{10}$, $\Pi_{11}$. Если считать, что в момент отплытия лодки отправляется автобус №0, то турист должен сесть в автобус №66. (Решение аналогичной задачи см. на с. 87–88 в журнале «Квант» №1/2 за 1993 г.)

**2.** $P_4(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$,

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

**3.** $S_k(0) = \int_0^0 P_k(x)dx = 0$.

**4.** *Указание*. Коэффициент при старшей степени многочлена $P_k(x)$ равен 1.

**5.** $-\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{2\cos\frac{1}{2}}\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

*Указание.*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(\pi+1)k + \cos(\pi-1)k\right).$$

## АНАЛОГИИ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

**1.** $T = \frac{kq\lambda}{R}$. **2.** $T = \sigma R$. **3, 4, 5.** $\Delta W = -W_0/2$.

## МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

### МАТЕМАТИКА

*Вариант 1*

**1.** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* В каждом из случаев $\cos x > 0$ и $\cos x < 0$ выполните подстановку $t = \frac{\cos 3x}{\cos x}$.

**2.** $x < \frac{34 - 30\sqrt{2}}{23}$, $x \geq 3$.

**3.** $\frac{5\sqrt{34}}{12}$. *Решение.* Точка $D$ является центром описанной около треугольника $ABC$ окружности, $AB = 5$, $AC = 4$. Пусть $O_1$ – центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник $BCD$, $O_2$ − центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника $ACD$, $M$ − середина отрезка $CB$ (рис.5).

Треугольник $DO_1O_2$ − прямоугольный и $O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + O_2D^2}$. Найдем радиусы окружностей: $O_2D =$

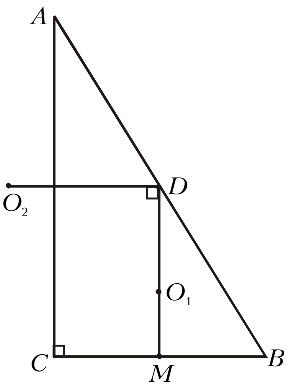


Рис. 5

$= \dfrac{CD}{2\sin A} = \dfrac{25}{12}$; в треугольнике $BCD$ полупериметр равен 4, $DM = 2$, $S_{BDM} = 3$, поэтому $O_1M = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3}{4}$, а $O_1D = DM - O_1M = \dfrac{5}{4}$.

**4.** 2; $15\ln 2 - 9$. *Решение.* Прямая $y = -18x + 9$ является касательной к графику функций $y = 9e^{-ax}$ в точке (0; 9), так как эта точка принадлежит обеим линиям, а по условию фигура $M$ и прямая $y = -18x + 9$ имеют только одну общую точку. Следовательно, имеем

$$-18 = \left(9e^{-ax}\right)'\Big|_{x=0} = -9a,$$

откуда $a = 2$.

Найдем точки пересечения кривых $y = f_1(x) = 9e^{-2x}$ и $y = f_2(x) = 15 - 4e^{2x}$:

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3},\ x_2 = \frac{\ln 3}{2}.$$

Площадь фигуры $M$ равна

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2}\left(15 - 4e^{2x} - 9e^{-2x}\right)dx = \left(15x - 2e^{2x} + \frac{9}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}}^{\frac{1}{2}\ln 3} = 15\ln 2 - 9.$$

**5.** $13/12$; $\pi/6$.

*Построение плоскости сечения* $\alpha$. Точки $K$ и $E$ лежат в плоскости $\alpha$, поэтому прямая $KE$ лежит в этой плоскости (рис.6). Пусть $M$, $L$ − точки пересечения прямых $AA_1$ и $KE$, $A_1B_1$ и $KE$ соответственно. Так как $M \in \alpha$ и $K \in \alpha$, то прямая $MK$ принадлежит $\alpha$. Далее (с менее подробным изложением) найдем точки пересечения плоскости $\alpha$ с ребрами призмы.

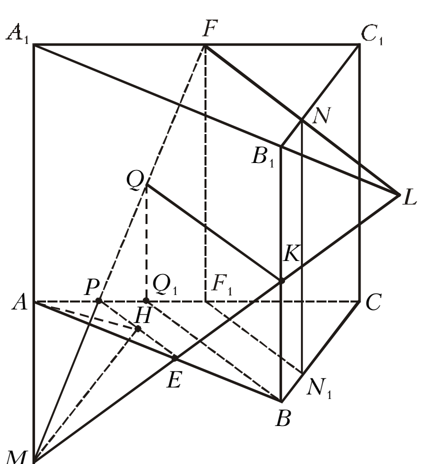


Рис. 6

Проведем прямую $MF$, пересекающую ребро $AC$ в точке $P$. Аналогично проведем прямую $LF$, пересекающую ребро $B_1C_1$ в точке $N$. Соединим точки $F$, $P$, $E$, $K$, $N$, $F$. Сечение построено.

*Вычисление площади сечения $S$ и угла $\varphi$ между плоскостями.* Введем обозначения: $AB = a$, $B_1B = h$. Пятиугольник $EPFNK$, в котором $PE$ и $FN$ параллельны, разбивается на две трапеции прямой, проходящей через точку $K$ параллельно $PE$ и пересекающей $PF$ в точке $Q$. Из равенства треугольников $AME$ и $EKB$ получим, что $MA = BK = h/2$. Из подобия треугольников $MAP$ и $A_1MF$ получим $AP = (1/3)A_1F$ и, следовательно, $AP = (1/6)a$. По теореме косинусов в треугольнике $APE$ найдем: $PE^2 = a^2/36 + a^2/4 - 2(a/6)(a/2)(1/2)$, т.е. $PE = a\sqrt{7}/6$. Спроектируем сечение на плоскость $ABC$. Пусть $Q_1$, $F_1$, $N_1$ − проекции точек $Q$, $F$, $N$. Тогда $F_1N_1 = FN$, отрезки $F_1N_1$, $BQ_1$, $PE$ попарно параллельны и $AP = PQ_1 = Q_1F_1 = a/6$, $BQ_1 = 2PE$, $F_1N_1 = (3/4)BQ_1 = (3/2)PE = a\sqrt{7}/4$. Итак, $FN = a\sqrt{7}/4$. Пусть $x$ − расстояние между прямыми $PE$ и $Q_1B$. Для нахождения $x$ воспользуемся тем, что высота $AH$ в треугольнике $APE$ равна $x$. Вычислим двумя способами площадь треугольника $APE$. Имеем $(1/2)AP\,AE\sin\pi/3 = (1/2)PE\,x$, откуда получим $x = (a/4)\sqrt{3/7}$. По теореме о трех перпендикулярах $MH$ перпендикуляра $PE$, т.е. $\angle\varphi = \angle AHM = \operatorname{arctg}(AM/AH) = 1/\sqrt{3} = \pi/6$. Площадь проекции искомого сечения $S_1 = x\left(PE + Q_1B\right)/2 + x\left(Q_1B + F_1N_1\right)/2 = 13a^2\sqrt{3}/96 = 13\sqrt{3}/24$. Искомая площадь $S = S_1/\cos\varphi = 13/12$.

**6.** (3; 29), (1; −17), (19; 397), (−15; 191). *Решение.* Выразив $y$ через $x$, получим

$$y = \frac{x^3 - 7x + 23}{x - 2}.$$

Выделим целую часть, преобразовав дробь:

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 + 2\left(x^2 - 2x\right) - 3(x - 2) + 17}{x - 2},$$

т.е.

$$y = x^2 + 2x - 3 + \frac{17}{x - 2}. \qquad (*)$$

Целые значения $y$ примет при целых $x$ тогда и только тогда, когда дробь $\dfrac{17}{x-2}$ примет целые значения, т.е. в следующих случаях: $x - 2 = 1$, $x - 2 = -1$, $x - 2 = 17$, $x - 2 = -17$. Отсюда находим: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 19$, $x_4 = -15$ а затем из равенства $(*)$ находим: $y_1 = 29$, $y_2 = -17$, $y_3 = 397$, $y_4 = 191$.

### Вариант 2

**1.** (2; −3), (−6; 1). *Указание.* Исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} xy(x + 2y) > 0, \\ (x + 2y)^2 = 16, \\ \left|\dfrac{xy}{6}\right| = 1. \end{cases}$$

**2.** $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \dfrac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

*Указание.* Неравенство равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -\sin x < 0, \\ \begin{cases} -\sin x \ge 0, \\ \dfrac{5 + 3\cos 4x}{8} > \sin^4 x. \end{cases} \end{array}\right.$$

**3.** $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

**4.** $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. *Решение.* Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \le 1$, т.е.

$$\left|a-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}, \text{ откуда } \frac{1}{4} \le a \le \frac{3}{4}.$$

Задача сводится к нахождению всех значений $a$, при которых функция $f(a) = \frac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Уравнение $f'(a) = \frac{1}{27}\left(-4a^{-5}+12a^{-4}\right) =$ $= \frac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \frac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \frac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \frac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

Так как $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ – целые числа, $a - 1 <$ $< f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений $a$ состоит из чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

**5.** $\sqrt{30}/4$; $\pi\sqrt{30}/28$. *Решение.* Пусть $E$ – точка пересечения $BC$ и $AD$, $M$ и $N$ – середины отрезков $CD$ и $AB$ соответственно (рис.7). Тогда $ABE$ – правильный треугольник, $NE =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $MN = \frac{2}{3}NE = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{3}$, так как $MN$ – диаметр вписанной в треугольник $ABE$ окружности, радиус которой равен $\frac{1}{3}NE$.

Заметим, что перпендикулярными основанию пирамиды являются грани $SBC$ и $SAD$, а линия их пересечения (прямая $SE$) – перпендикуляр к основанию и $SE = \sqrt{5}$.

Пусть $MK$ – высота в треугольнике $SMN$, тогда $MK$ – перпендикуляр к плоскости $ABS$ ($KM \perp SN$ и $KM \perp AB$, так как $AB$ – перпендикуляр к плоскости $SNE$). Прямая $CD$ параллельна плоскости $SAB$ и поэтому расстояние от точки $D$ до плоскости $SAB$ равно $MK$.

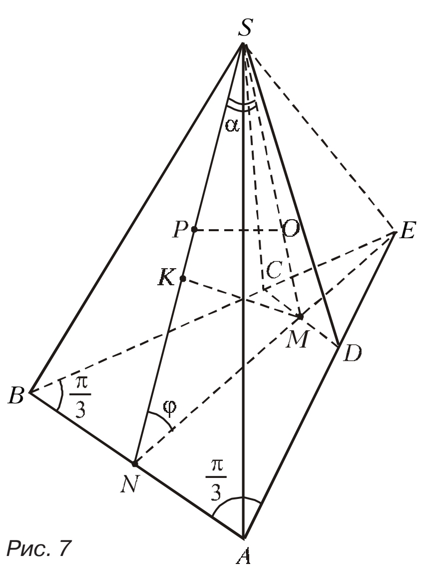


Рис. 7

Если $\angle SNM = \varphi$, то $KM = MN \sin\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SE}{NE} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, откуда $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$, $KM = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} =$ $= \frac{\sqrt{30}}{4}$.

Пусть $O$ – центр окружности, вписанной в треугольник $SCD$, $P$ – точка пересечения отрезка $SN$ с перпендикуляром к стороне $SM$ треугольника $SMN$, проведенном через точку $O$.

Радиус $r$ этой окружности равен радиусу основания конуса, высота $H$ конуса равна $OP$, а его объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

Если $\sigma$ – площадь треугольника $SCD$, $p$ – его полупериметр, то $\sigma = \frac{1}{2}CD \cdot SM$, $p = SD + \frac{CD}{2}$, где $CD = \frac{1}{3}AB =$ $= 2$, $SM = \sqrt{SE^2+ME^2} = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SM^2+MD^2} =$ $= \sqrt{8+1} = 3$, $p = 4$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ и поэтому $r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO =$ $= SM - r = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $\angle NSM = \alpha$, тогда $H = SO\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Найдем $\cos\alpha$, применив теорему косинусов к треугольнику $SMN$.

Получим $MN^2 = SN^2 + SM^2 - 2SN\cdot SM\cos\alpha$, где $SN =$ $= \sqrt{SE^2+NE^2} = \sqrt{5+27} = 4\sqrt{2}$, $SM = 2\sqrt{2}$, откуда $\cos\alpha =$ $= \frac{7}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$, $H = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{3\sqrt{30}}{14}$.

**6.** $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

*Решение.* Пусть $x_1$ и $x_2$ – абсциссы точек, в которых график функции $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где $c < 0$, пересекает ось $Ox$. Тогда $x_1$ и $x_2$ – корни многочлена $f(x)$, а $f(x)$ делится на $(x-x_1)(x-x_2)$, откуда следует, что $f(x) =$ $= (x-x_1)(x-x_2)(x-\alpha)$, где $\alpha$ – одно из чисел $x_1$, $x_2$ (уравнение $f(x) = 0$ по условию имеет ровно два различных корня). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет вид $f(x) =$ $= (x-x_1)^2(x-x_2)$, откуда находим $f'(x_1) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_1, 0)$ совпадает с осью $Ox$.

По условию ордината точки $A$ равна $c$, где $c < 0$, а касательная к графику функции $y =$ $= f(x)$ в точке $M$ проходит через точку $A$. Поэтому абсцисса точки $M$ равна $x_2$, а абсцисса точки $N$ равна $x_1$ (рис.8). Задача сводится к нахождению чисел $x_1$ и $x_2$. Так как $f'(x_2) = (x_2-x_1)^2 =$ $= K$, то уравнение прямой, касающейся в точке $M$ графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = k(x-x_2)$. Эта прямая проходит через точку $A(0, c)$, где $c = f(0) = -x_2x_1^2$. Поэтому $c = -kx_2$ и $x_2x_1^2 = x_2(x_2-x_1)^2$, откуда $x_2 = 2x_1$ $(x_2 \ne 0)$ и $c = -2x_1^3$.

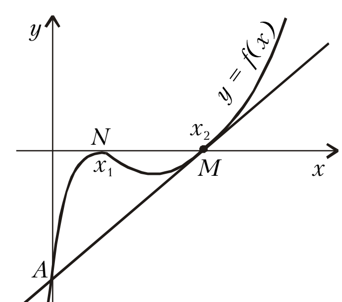


Рис. 8

Пусть $S$ – площадь треугольника $AMN$, тогда $S =$ $= 1 = -c\frac{1}{2}(x_2-x_1) = -\frac{1}{2}cx_1$, откуда $c = -\frac{2}{x_1} = -2x_1^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

## ФИЗИКА

*Вариант 1*

**1.** Пусть нижний брусок с массой $M$ движется вниз вдоль наклонной плоскости с ускорением $a$. Введем систему координат: ось $X$ направим вдоль наклонной плоскости, ось $Y$ пер-

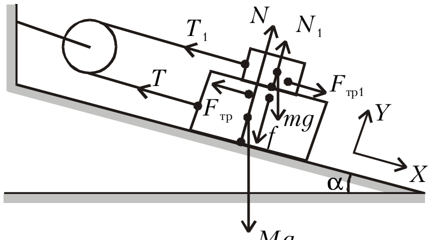



Рис. 9

пендикулярно ей (рис.9). Рассмотрим силы, действующие на нижний брусок. Это сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$, сила давления со стороны верхнего бруска $\vec{f}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, действующая со стороны верхнего бруска. Уравнение движения бруска по оси $X$ имеет вид

$$Ma = Mg\sin\alpha - T - F_{\text{тр}}.$$

Вдоль оси $Y$ сумма всех сил, действующих на нижний брусок, равна нулю. Следовательно,

$$N = Mg\cos\alpha + f.$$

В силу того, что трос нерастяжим, верхний брусок движется с тем же ускорением вверх по наклонной плоскости под действием силы тяжести $m\vec{g}$, силы реакции $\vec{N}_1$, силы натяжения $\vec{T}_1$ $(T_1 = T)$ и силы трения со стороны нижнего бруска $\vec{F}_{\text{тр}_1}$. Уравнение движения для него по оси $X$ имеет вид

$$ma = T - F_{\text{тр}_2} - mg\sin\alpha,$$

а по оси $Y$ –

$$N_1 = mg\cos\alpha = f.$$

Кроме того,

$$F_{\text{тр}_1} = F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha.$$

Поскольку система двух брусков покоится, их ускорения равны нулю, и система написанных уравнений примет вид

$$\begin{cases} Mg\sin\alpha - T - \mu mg\cos\alpha = 0, \\ -mg\sin\alpha + T - \mu mg\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая систему полученных уравнений, для искомого коэффициента трения $\mu$ получаем

$$\mu = \frac{M-m}{2m}\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**2.** Очевидно, что при движении «тройника» с ускорением $a$ вправо вода будет выливаться из левой трубки. Уровни воды, оставшейся в средней и правой трубках, обозначим через $X$ и $Y$ (рис.10). Из условия задачи следует, что

$$l - X + l - Y = 9/32\cdot 4l.$$

Следовательно,

$$X + Y = 7/8\,l. \qquad (1)$$

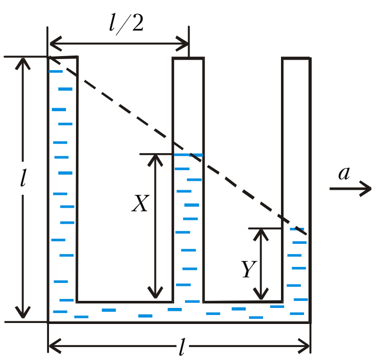



Рис. 10

Давление жидкости у дна левой трубки равно

$$p_1 = p_{\text{а}} + \rho gl,$$

где $p_{\text{а}}$ – атмосферное давление. Давление у дна средней трубки равно

$$p_2 = p_{\text{а}} + \rho gX$$

и у дна правой трубки –

$$p_3 = p_{\text{а}} + \rho gY.$$

Запишем уравнение движения горизонтальной части жидкости, заключенной между левой и правой трубками:

$$\rho glS - \rho gYS = \rho lSa. \qquad (2)$$

Для горизонтальной части жидкости, заключенной между средней и правой трубками, уравнение движения имеет вид

$$\rho gXS - \rho gYS = \rho lSa/2. \qquad (3)$$

Совместное решение уравнений (1), (2), (3) дает искомое ускорение:

$$a = 3/4\,g.$$

**3.** Пусть температура гелия на диаграмме $p$-$V$ в точке *1* равна $T_1$. Так как точки *2* и *3* лежат на изотерме, $T_2 = T_3$. Точка *1* лежит «выше» точек *2* и *3*. Следовательно, $\Delta T = T_1 - T_2$. Запишем уравнение первого начала термодинамики для адиабатического процесса *1–2*:

$$0 = A_{12} - C_V\Delta T \quad \left(C_V = \frac{3}{2}R\right). \qquad (1)$$

Соответствующее уравнение для изотермы (участок *2–3*):

$$Q_{23} = A_{23}. \qquad (2)$$

Наконец, для изобары *3–2* имеем

$$R\Delta T = A_{31}. \qquad (3)$$

В силу того, что работа газа в замкнутом цикле равна $A$:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{31},$$

из уравнений (1), (2), (3) получим

$$A_{23} = A - 5/2\,R\Delta T.$$

**4.** Сразу после замыкания ключа $K_2$ ток через катушку индуктивности сохраняется и равен $I_0$. Напряжение на конденсаторе сразу после замыкания ключа $K_2$ равно нулю. Обозначим ток, протекающий по резистору $R_1$, через $I_1$, а по резистору $R_2$ через $I_2$ (рис.11). Согласно первому закону Кирхгофа,

$$I_2 = I_0 + I_1.$$

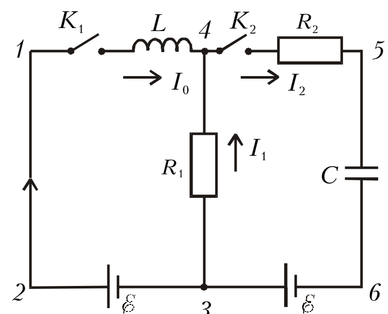



Рис. 11

Запишем закон Ома для замкнутой цепи *3–4–5–6–3*:

$$\mathcal{E} = +I_1R_1 + I_2R_2.$$

Из совместного решения приведенных уравнений находим

$$I_1 = \left(\mathcal{E} - I_0R_2\right)/\left(R_1 + R_2\right).$$

Для определения напряжения на катушке индуктивности запишем закон Ома для замкнутой цепи *1–2–3–4–1*:

$$\mathcal{E} = U_L - I_1R_1.$$

Отсюда

$$U_L = \frac{\mathcal{E}\left(2R_1 + R_2\right) - I_0R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

В установившемся режиме напряжение на катушке равно нулю, ток через резистор $R_2$ равен нулю. Рассмотрим контур *1–2–3–6–5–4–1* и найдем

$$U_C = 2\mathcal{E}.$$

**5.** Через оптический центр линзы проведем вспомогательный луч $OC$ параллельно лучу $AB$ (рис.12). Преломленный луч $BC$ пересекается с лучом $OC$ в точке $C$, принадлежащей фокальной плоскости линзы. Продолжим луч $BC$ влево до пересечения с главной оптической осью линзы в точке $A^*$. Угол $CA^*O$ является половиной искомого

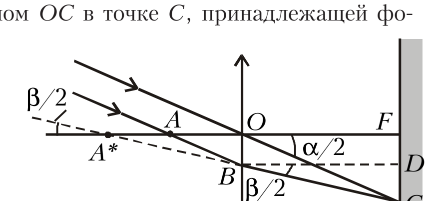



Рис. 12

угла $\beta$. Проведем линию $BD$ параллельно $OF$. Угол $CBD$ равен $\beta/2$. Из треугольника $CBD$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{FC - OB}{F} = \frac{(F-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{F}.$$

Отсюда

$$\beta = 1{,}7 \cdot 10^{-2} \text{ рад}.$$

*Вариант 2*

**1.** 1) $a = \frac{g}{6}(1-4\mu) = \frac{g}{15} = 0{,}65$ м/с$^2$; 2) $v = \sqrt{\frac{3-8\mu}{12}gL} \approx 1$ м/с.

**2.** $E_{\text{вр}} = \frac{\alpha}{\alpha+1}pV = 4{,}8 \cdot 10^6$ Дж.

**3.** 1) $q_{30} = \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}$; 2) $q_3 = \frac{q_0}{2} + \frac{\varepsilon_0 S\mathcal{E}}{d}$.

**4.** 1) $I = U_0\sqrt{\frac{C}{L_1+L_2}}$; 2) $U_m = U_0\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}$.

**5.** 1) $b = -\frac{LF}{2L+F} = -0{,}45F$; 2) $v_{\text{из}} = 0{,}1A\sqrt{\frac{k}{m}}$.

## МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОНИКИ И МАТЕМАТИКИ

### МАТЕМАТИКА

*Вариант 1*

**1.** $\{-2\}\cup(-2/3;\,3]$. **2.** $7/3$; 83.

**3.** $-\frac{\pi}{3}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\sin 4x + \operatorname{tg} x = \pm\operatorname{tg} x, \\ \operatorname{tg} x \le 0. \end{cases}$$

**4.** 144. *Указание.* Из условия следует, что проекцией вершины $S$ на плоскость основания служит центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, а высота пирамиды равна радиусу этой окружности.

**5.** Да; $[-1/4;\,1]$. *Указание.* Достаточно выяснить, при каких значениях $a$ имеет корни уравнение $f(x) = a$. Или, что то же самое, уравнение

$$\sqrt{3}\cos x - a\sin x = 3a - 1,$$

или уравнение

$$\cos(x+\varphi) = \frac{3a-1}{\sqrt{a^2+3}},$$

где $\varphi = \arcsin\frac{a}{\sqrt{a^2+3}}$.

*Вариант 2*

**1.** $(-1;\,1)$. **2.** $\frac{7\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{3\pi}{4}+\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

**3.** $\frac{5a-4\pm\sqrt{3a^2-40a+28}}{2(1-a^2)}$ при $a \in (-\infty;\,-1)\cup(-1;\,2/3)\cup(2/3;\,1)\cup(1;\,14/13)\cup(2;\,3)\cup(3;\,\infty)$; $1/3$ при $a = -1$; $9/5$ при $a = 2/3$; $-3$ при $a = 1$; $-13/3$ при $a = 14/13$; $-3/8$ при $a = 3$.
*Указание.* Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (a^2-1)x^2 + (5a-4)x + 3 = 0, \\ x+1 \ne 0; \quad ax+2 \ne 0. \end{cases}$$

Если $a = 1$, то $x = -3$. При $a = -1$ получаем $x = 1/3$. Дискриминант квадратного уравнения положителен при $a < 14/13$ и $a > 2$, так что уравнение имеет 2 корня, из которых необходимо выбрать корни, удовлетворяющие остальным условиям системы. При $a = 14/13$ единственный корень $x = -13/3$; если же $a = 2$, то $x = -1$ – не удовлетворяет системе.

**4.** $\frac{4}{9}\sqrt{2}$. *Указание.* Проведите плоскость через высоту пирамиды и середину $F$ ребра $CD$. Эта плоскость пересекает секущую плоскость по прямой. Расстояние от точки $F$ до этой прямой равно расстоянию от точки $D$ до секущей плоскости.

**5.** $(0;\,3/7)\cup\{1/2\}$. *Указание.* После замены $u = \sqrt{x+2}$ задача сводится к отысканию тех значений $a$, при которых уравнение $au^2 - u + 7a - 3 = 0$ имеет единственный неотрицательный корень.

### ФИЗИКА

**1.** $s = (2v_0^2\operatorname{tg}\alpha)/(g\cos\alpha) = 57$ м; $H = (v_0^2\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha)/(2g) = 7{,}1$ м.

**2.** $T = 2\pi A(M+m)/(mv) = 1{,}3$ с.

**3.** $v = \sqrt{(v_1^2+v_2^2)/2} = 450$ м/с. **4.** $\Delta h = h_1(1+h_2/H) = 5{,}0$ см.

**5.** $\varphi = Er = 15$ кВ; $q = 4\pi\varepsilon_0 Er^2 = 8{,}3$ нКл.

**6.** $\eta_1 = P_1I_2(I_2-I_1)/(P_1I_2^2 - P_2I_1^2) = 83\%$,

$\eta_2 = P_2I_1(I_2-I_1)/(P_1I_2^2 - P_2I_1^2) = 63\%$;

$I_0 = (P_1I_2^2 - P_2I_1^2)/(P_1I_2 - P_2I_1) = 60$ А.

**7.** $t = T/8$. **8.** $\Delta\varphi = 2\pi\nu L/c = \pi/5$.

**9.** $n = 1\Big/\sqrt{\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2} = 1{,}5$.

**10.** $N = 4\pi\varepsilon_0 rhc(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_1\lambda_2 e^2) = 4{,}3\cdot10^7$.

## МОСКОВСКИЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

### МАТЕМАТИКА

*Письменный экзамен*

*Вариант 1*

**1.** $\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Не забудьте учесть условия $1+\cos x > 0$, $\sin x > 0$, $\sqrt{2}\sin x \ne 1$.

**2.** $\left(\frac{1}{4};\,\frac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$. *Указание.* Обозначив $y = \log_{0,5}x$, рассмотрите два случая: $y < 2$ и $y > 2$.

**3.** 456 ц.

**4.** $\frac{\sqrt{2}}{16}a^2$. *Указание.* Первый способ: сравните сечение с $\Delta ABQ$, где $Q$ – середина $CM$; второй способ: примените формулу Герона.

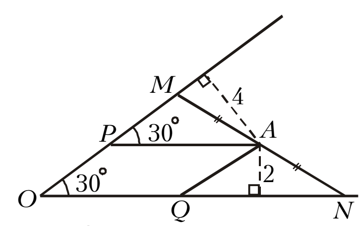


Рис. 13

**5.** 32 см$^2$. *Указание.* Проведите $AP$ и $AQ$ параллельно сторонам угла (рис.13), затем докажите, что минимум $S_{\Delta OMN}$ достигается в случае равенства треугольников $PMA$ и $QAN$.

*Вариант 2*

**1.** $-\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Не забудьте учесть условия $\operatorname{ctg}x > 0$, $\operatorname{ctg}x \ne 1$, $\sin x \ne 0$, $\cos x < 0$, из которых, в частности, следует, что $\sin x < 0$.

**2.** $\left[\log_3\frac{\sqrt{41}-1}{2};\,1\right)$. *Указание.* Записав равенство в виде $\log_x\log_3\left(10-9^x\right)\ge\log_x x$, рассмотрите два случая $0<x<1$ и $x>1$.

**3.** 110, 96, 66 страниц. *Указание.* Заметив, что нормы машинисток относятся, как 5:4:3, примите их равными $5p$, $4p$, $3p$.

**4.** $\frac{\sqrt{2}}{16}a^2$. *Указание.* Первый способ: сравните сечение с $\Delta BCQ$, где $Q$ – середина $AD$; второй способ: примените формулу Герона.

**5.** 9; 15/2. *Указание.* Выразите площадь параллелограмма как функцию $S(x)$, где $x$ – длина стороны параллелограмма, лежащая на основании треугольника.

*Вариант 3*

**1.** $\frac{\pi}{3}r^3\mathrm{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha$. **2.** $k\frac{\pi}{4}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

**3.** $\left(\frac{1}{3};\,1\right)$. **4.** 1; 3. *Указание.* Удобно обозначить $y=5^{x-1}$.

**5.** $y=-9$ (касательная горизонтальна).

*Вариант 4*

**1.** $2d^2\cos\beta\cdot\sqrt{2-\cos^2\beta}$.

**2.** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$. **3.** $(-\infty;\,16)\cup(-3;\,\infty)$.

**4.** 10; $10^{-9/2}$. **5.** (1; –27), (4; 0).

*Вариант 5*

**1.** $26\frac{1}{4}$ см$^2$. *Указание.* Сначала рассмотрите отсеченную пирамиду – она подобна исходной.

**2.** $1+2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$; $2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. *Указание.* Преобразуйте правую часть уравнения в произведение.

**3.** $(-\infty;\,-1)\cup(1;\,+\infty)$. **4.** 3; 27.

**5.** $y=-1$ (касательная горизонтальна).

*Задачи устного экзамена*

**1.** 1.

**2.** $\sqrt{2}$. *Указание.* Преобразуйте разность $\cos 20°-\cos 80°$ в произведение, а $1+\cos 280°$ замените на $2\cos^2 140°$.

**3.** 1. *Указание.* Воспользуйтесь тем, что

$$\log_q p=\frac{1}{\log_p q}.$$

**4, 5, 6.** См. рис.14 (*а*, *б*, *в*).

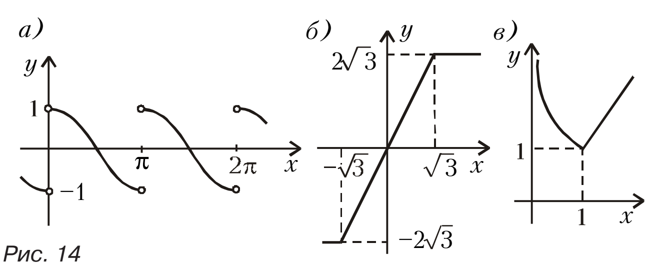



Рис. 14

**7.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Пусть $x$, $y$ – половины диагоналей параллелограмма. Выразите стороны параллелограмма через $x$, $y$, а из полученных уравнений найдите произведение $xy$.

**8.** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ м. *Указание.* Через вершину верхнего основания трапеции проведите прямую, параллельную боковой стороне трапеции.

**9.** 84. **10.** (0; 0), (–1; 1), ($\sqrt{2}$; 2), ($-\sqrt{2}$; 2).

**11.** $[-2;\,2)\cup[3;\,4)$. **12.** $(-\infty;\,0]\cup[6;\,+\infty)$.

**13.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.

**14.** $-\frac{7}{2}$; $\frac{1}{2}$. *Указание.* Обозначьте $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|2x+3|}$.

**15.** $a=-1/2$. *Указание.* Рассмотрите случаи $a>0$, $a=0$, $a<0$.

## ФИЗИКА

**1** $m=100$ кг. **2.** $v_0=25$ м/с; $h=31{,}25$ м.

**3.** $\mu\approx 0{,}06$. **4.** $P=678$ Н. **5.** $V_0=2{,}73$ л.

**6.** $t\approx 77$ °С. **7.** $E\approx 3\cdot10^5$ Н/Кл; $Q\approx 0{,}5\cdot10^{-6}$ Кл.

**8.** $Q_1=400$ кДж; $Q_2=1{,}8$ МДж. **9.** $\alpha\approx 61°$. **10.** Нет.

# V РОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО АСТРОНОМИИ И КОСМИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

## ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

*8 класс*

**1.** Лучше в первой четверти.

**2.** Около 180 тысяч лет тому назад.

**3.** От 5 до 8 раз в году. **4.** Над Прагой.

**5.** Примерно 176 суток. **6.** Вне Солнца.

*9 класс*

**5.** Приблизительно 3,8 мин.

**6.** Диаметр астероидов должен быть больше 20 км.

*10 класс*

**1.** $h_{\max}=90°-\varphi+(\varepsilon+i)\approx 63{,}1°$.

**2.** $\rho\ge 3\pi/\left(GT^2\right)=1{,}09\cdot10^6$ кг/м$^3$.

**3.** Центр масс может находиться как внутри, так и вне Солнца – в зависимости от взаимного расположения планет.

**4.** На $0{,}074^m$.

**5.** Около 700 звезд за 27,3 суток (время полного оборота Луны относительно звезд), т.е. чуть больше одной звезды в час.

**6.** Зонд легче запустить с Марса, сначала выведя его на окопланетную орбиту, а затем переведя на очень вытянутую орбиту вокруг Солнца. Длительность полета – 121,4 суток.

*11 класс*

**1.** Наблюдаемая галактика в 2–2,5 раза меньше нашей.

**2.** На $\Delta m/2=2{,}62^m$.

**3.** В противоположной точке Солнце поднялось над горизонтом уже на 1°.

**4.** От $-9^m$ до $-5^m$ (в зависимости от величины коэффициента отражения в кошачьем глазе и яркости фонаря).

**5.** Время перелета – около 259 суток, а время ожидания – около 454 суток.

**6.** Площадь паруса – около 6 км$^2$.

# ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

**1.** Предположим, что такая расстановка существует. Начиная с места, где стоит нуль, занумеруем по часовой стрелке места, на которых стоят числа, номерами от 0 до 14 (всего чисел от –7 до 7 как раз 15 штук). Рассмотрим числа, стоящие на местах с номерами 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Числа, номера которых соседние в этом списке, стоят на окружности через одно. Значит, все они одного знака, что противоречит условию задачи.

**2.** а) Если бы каждая цифра встречалась не более 5 раз, то всего было бы не более $5 \cdot 9 = 45$ цифр. Следовательно, некоторая цифра встречается по крайней мере 6 раз, т. е. можно вычеркнуть цифры так, что останется число из 6 одинаковых цифр. Оно делится на $111111 = 111 \cdot 1001$. б) $41 \cdot 271 = 11111$.

**3.** Докажем, что $\angle EAD = \angle EDA$ (рис. 15). Поскольку $\angle EDA = \angle CDF$, достаточно доказать, что $\angle EAD =$

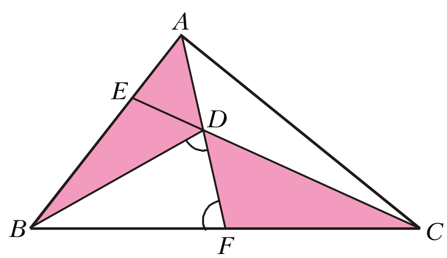



*Рис. 15*

$= \angle FDC$. Треугольники $ADB$ и $DFC$ равны по двум сторонам и углу между ними: $AD = DF$, $DB = BF = FC$, $\angle ADB = 180° - \angle BDF = 180° - \angle BFD = \angle DFC$. Значит, $\angle EAD = \angle FDC$, что и требовалось.

Более простое решение можно получить, если рассмотреть медианы треугольника $BDF$ (рис. 16).

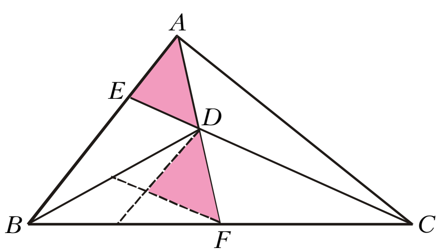



*Рис. 16*

**4.** 4,75.

**5.** *Указание.* Рассмотрите гомотетию с центром $A$, переводящую точки $K$ и $L$ в середины отрезков $AB$ и $AC$.

**6.** Если никакой корень многочлена $f(x) - 10$ не является корнем производной, то многочлен $f(x) - 10$ меняет знак в десяти точках, так что его степень четна. Аналогично из условия следует, что многочлен $f(x) - 15$ меняет знак в пятнадцати точках, так что его степень нечетна. Этого не может быть, поскольку упомянутые многочлены имеют одинаковые степени.

**7.** 99. Пример – числа от 10001 до 10099. Действительно, все эти числа лежат в промежутке от $100 \cdot 100$ до $100 \cdot 101$, поэтому не могут быть представлены в виде произведения двух трехзначных чисел, так как $100 \cdot 100$ и $100 \cdot 101$ – два наименьших произведения трехзначных чисел. С другой стороны, среди любых 100 подряд идущих пятизначных чисел обязательно встретится число, кратное 100.

**8.** Разрежем квадрат на блоки размером $2 \times 2$. Любой блок либо весь одного цвета, либо две его клетки синие, а две – красные. Значит, в каждом блоке количество синих клеток четно. Следовательно, и во всем квадрате количество синих клеток четно.

**9.** 7 служащих. *Указание*. Разность количеств денег у первого и второго служащих всегда делится на количество служащих.

**10.** Пусть числа расставлены в вершинах правильного 30-угольника. Для каждого $k = 1, 2, \ldots, 15$ проведем луч из точки числа $k$ через точку числа $31 - k$. Если числа вида $k$ и $31 - k$ расположены в соседних вершинах 30-угольника и меняются местами, то соответствующий луч меняет свое направление на 180°. Каждому лучу сопоставим угол, на который нужно его повернуть по часовой стрелке, чтобы после поворота его направление совпало бы с положительным направлением оси абсцисс. Проследим за суммой этих углов (следует помнить, что углы измеряются с точностью до кратных 360°).

Если числа вида $k$ и $31 - k$ ни разу не меняются местами, то при каждой операции один из лучей поворачивается на такой же угол, на какой в противоположном направлении поворачивается другой луч (на рисунке 17 вместо 30-угольника взят 10-угольник и показано, что происходит с лучами, когда меняются местами числа 2 и 6). Если каждое число после не-

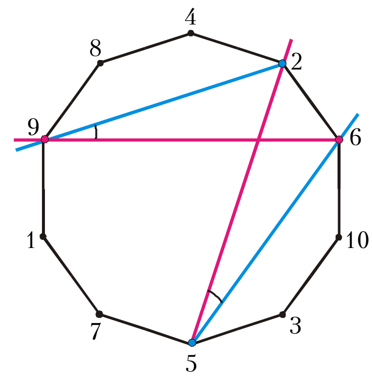



*Рис. 17*

скольких операций переместится на диаметрально противоположное место, то все 15 лучей изменят свои направления на противоположные. Значит, сумма углов изменится на $15 \cdot 180°$. Получили противоречие: сумма при операциях не менялась, а $15 \cdot 180°$ не кратно 360°.

**11.** Приведем пример такой последовательности. Пусть $a_{2000} = 3$, $a_{1999} = = 4$. Числа $a_n$ при $n > 2000$ определим по данной в условии формуле. Числа $a_n$ при $1 \le n \le 1998$ построим «обратным ходом» (т. е. сначала $a_{1998}$, потом $a_{1997}$ и так вплоть до $a_1$) по формуле $a_n = (a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1)$. Очевидно,

$$4 = a_{1999} < 6 = a_{1998} < a_{1997} < \ldots < a_1 .$$

Убедимся, что построенная последовательность удовлетворяет соотношению $a_{n+2} = \text{НОД}(a_n, a_{n+1}) + 1$. При $n \ge 1999$ это выполняется по определению, при $n = 1998$ проверяется непосредственно, а при $n \le 1997$ имеем $\text{НОД}(a_n, a_{n+1}) = \text{НОД}((a_{n+1} - 1)(a_{n+2} - 1),\ a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1,\ a_{n+1}) = \text{НОД}(a_{n+2} - 1, (a_{n+2} - 1)(a_{n+3} - 1)) = a_{n+2} - 1$, что и требовалось.

**12.** Расселим сначала школьников произвольным образом. Если какие-то двое знакомых при этом окажутся в одной комнате, то у каждого из них в других комнатах не более чем 29 знакомых, так что найдется комната, в которой ни у одного, ни у другого знакомых нет. Переселим одного из двоих в такую комнату. Если после этого опять какие-то два знакомых школьника окажутся в одной комнате, то выполним еще одно переселение. Так будем действовать, пока будем находить знакомых в одной комнате.

Если после этого все знакомые некоторого школьника $A$ оказались в одной комнате и число этих знакомых больше 1, то рассмотрим одного из этих знакомых – школьника $B$. Подумаем, что может помешать поселить $B$ в некоторую новую комнату, в которой у него нет ни одного знакомого? Только то, что именно в этой комнате живут все знакомые одного из его знакомых.

Комнат, куда можно пытаться переселять школьника $B$, не менее 60 — 1— 30 = 29, поскольку одну из 60 комнат занимает сам школьник и не более 30 комнат занимают его знакомые. Поскольку знакомых у школьника $B$ не более 30, причем один из них – это школьник $A$, то из наличия препятствий к поселению $B$ во все комнаты, где у него нет знакомых, следует, что $B$ знаком, кроме $A$, с 29 школьниками и у каждого из этих школьников все знакомые, кроме $B$, живут в одной комнате. Теперь ясно, что взяв любого отличного от $B$ школьника $C$, знакомого со школьником $A$, мы можем переселить $C$ в новую комнату. После ряда таких переселений условие задачи будет удовлетворено.

**13.** Поскольку $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ – высоты, то четырехугольники $ABA_1B_1$ и $BCB_1C_1$ – вписанные, значит, $\angle C_1BM = \angle C_1B_1A = \angle A_1B_1C = \alpha$. Так как $C_1M$ – медиана прямоугольного треугольника $BC_1C$, выходящая из прямого угла, то $\angle BC_1M = \alpha$, откуда $\angle YC_1X = \angle YB_1X = \alpha$. Точки $X$ и $Y$ лежат в одной полуплоскости с границей $BC$. Предположим для определенности, что в этой же полуплоскости лежит и вершина $A$. Тогда четырехугольник $XYC_1B_1$ – вписанный, и $\angle YXC_1 = \angle YB_1C_1 = \angle C_1BM$. Значит, $XY \parallel BC$.

**14.** Поскольку $\max(a,b) \ge a \ge \min(a,c)$, из условия задачи следует неравенство $\max(c,1997) \le \min(b,1998)$, откуда $c \le \max(c,1997) \le \min(b,1998) \le b$.

**15.** Пусть $H$ – основание высоты, опущенной из $A$ на $BC$. Угол $BCD$ – прямой, так как $BD$ – диаметр. Четырехугольник $BECD$ составлен из треугольников $BCD$ и $BCE$, в которых $DC$ и $EH$ – высоты, опущенные на $BC$. Значит, $S_{BECD} = \frac{1}{2}BC(EH + CD)$. Поскольку $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH$, достаточно доказать равенство $EH + CD = AH$. Сумма $EH + CD$ есть сумма проекций отрезков $CE$ и $CD$ на прямую $AE$ (прямые $AE$ и $DC$ параллельны как перпендикуляры к $BC$). Отрезок $AH$ есть сумма проекций отрезков $AD$ и $DC$ на прямую $AE$. Проекции отрезков $CE$ и $AD$ на прямую $AE$ равны, поскольку $ADCE$ – равнобочная трапеция.

**16.** Пусть закрытый мост $M$ соединяет острова $A$ и $B$. Расстояние (наименьшее число мостов) между какими-то островами может увеличиться при закрытии моста $M$ только в том случае, когда до закрытия любой кратчайший путь между этими островами проходил через $M$. Кроме того, ясно, что любой участок кратчайшего пути тоже является кратчайшим путем, и кратчайший путь не может проходить через один остров два раза.

Предположим, что утверждение задачи не выполняется, т.е. на каждом острове кто-то живет. Сначала докажем, что после закрытия моста $M$ с острова $A$ можно добраться до острова $B$. Для этого рассмотрим человека, живущего на острове $A$. Пусть его друг, расстояние до которого увеличилось на один мост, живет на острове $X$. Поскольку кратчайший путь от $A$ до $X$ должен был проходить через мост $M$, он состоял из переезда через $M$ и некоторого кратчайшего маршрута от $B$ до $X$, который при этом не проходил через $M$. Значит, от $A$ до $B$ после закрытия моста $M$ можно добраться, проехав сначала от $A$ до $X$, а потом от $B$ до $X$.

Рассмотрим кратчайший путь между островами $A$ и $B$ после закрытия моста $M$. Выберем остров $C$ посередине или «почти посередине» этого пути, т.е. так, чтобы расстояния от $C$ до $A$ и $B$ отличались не более чем на 1. Пусть $Y$ – тот остров, расстояние от $C$ до которого увеличилось на один мост. Рассмотрим кратчайший путь от $C$ к $Y$ до начала ремонта. Пусть, например, он шел сначала от $C$ к $A$, потом через мост $M$ на $B$, а потом от $B$ к $Y$. Рассмотрим вместо этого путь, который сначала идет от $C$ к $B$ (по участку кратчайшего пути от $A$ к $B$), а потом от $B$ к $Y$ так же, как и в первом пути. Этот путь $CBY$ не длиннее исходного пути $CABY$, так как участок $CB$ отличается от участка $CA$ не более чем на 1. Значит, существовал кратчайший путь от $C$ к $Y$, не проходящий через мост $M$. Это противоречит тому, что расстояние от $C$ до $Y$ увеличилось.

**17.** Всякая проходящая через центр куба плоскость делит куб на две части, симметричные относительно центра куба. Обратно, всякая плоскость, делящая куб на части равного объема, проходит через центр куба. Действительно, в противном случае можно было бы параллельно перенести плоскость, чтобы она стала проходить через центр куба. При таком движении объем одной из частей куба увеличится, а объем другой – уменьшится, что невозможно, так как после переноса объемы опять должны быть равными.

Итак, обе плоскости проходят через центр куба. Каждая из образовавшихся четвертей куба представляет собой объединение нескольких пирамид с вершинами в центре куба. Высоты этих пирамид равны половине ребра куба. Следовательно, объем любой из четвертей куба равен одной шестой длины ребра куба, умноженной на площадь соответствующей части поверхности куба. Поэтому плоскости делят поверхность куба на части равной площади.

**18.** В силу свойства вписанных углов, $\angle EFD = \angle EOD = \angle BAD = \angle BCD$, поэтому четырехугольник $BFDC$ – вписанный. Тогда

$$\angle BCF = \angle BDF = \angle OEF = \angle OAB = \angle ACD,$$

откуда $\angle BCA = \angle FCD$.

**19.** Проведем все вертикали и горизонтали, пересекающие многоугольник. Пусть в результате получилось $n$ вертикальных прямых и $m$ горизонтальных. Поскольку каждая из этих прямых пересекает стороны многоугольника по крайней мере в двух точках, то достаточно доказать неравенство $m + n \ge 20$. Действительно, если $m + n \le 19$, то $mn \le 90$.

**20.** Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, $K$ и $L$ – ее проекции на стороны $BC$ и $AD$, $M$ и $N$ – середины сторон $AB$ и $CD$ соответственно. Пусть $P$ и $Q$ – середины отрезков $AO$ и $OB$ соответственно. Так как медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла, равна половине гипотенузы, то $MP = BO/2 = KQ$, $LP = AO/2 = MQ$. Поскольку треугольники $AOL$ и $BOK$ подобны, $\angle APL = \angle BQK$, также $\angle APM = \angle AOB = \angle BQM$, значит, $\angle MPL = \angle MQK$. Следовательно, $\Delta MPL = \Delta KQM$ и $ML = KM$. Аналогично, $KN = NL$, и точки $K$ и $L$ симметричны относительно прямой $MN$.

**21.** Пусть $N$ – сумма чисел на одном листе, $n$ – наибольшее целое число, для которого $2^n \le N$. Тогда сумма чисел на всех листах равна $10N$. Если никакая степень двойки не встречается более 5 раз, то их сумма не превосходит

$$5\left(2^n + 2^{n-1} + \ldots + 1\right) = 5\left(2^{n+1} - 1\right) = 10 \cdot 2^n - 5 < 10N.$$

**22.** Могут. Сопоставим городам числа $c_1$, $c_2$, …, $c_{1998}$ так, чтобы все суммы $c_i + c_j$ пар чисел были различными (например, можно положить $c_i = 2^i$). Пусть цена билета между двумя городами равна сумме чисел, сопоставленных этим городам. Тогда все цены различны, и стоимость любого кругового маршрута равна $2(c_1 + c_2 + \ldots + c_{1998})$.

**23.** По теореме о вписанном угле, угол $\angle EFC$ равен половине величины дуги $EC$ окружности $ECF$. По теореме об угле между хордой и касательной, $\angle ECA$ тоже равен половине дуги $EC$. Поскольку четырехугольник $ADEC$ вписанный, $\angle ECA = \angle EDB$. Таким образом, $\angle EFC = \angle EDB$. Значит, прямые $AB$ и $CF$ параллельны. Обозначим через $G$ точку пересечения прямых $AE$ и $BK$. Поскольку прямые $BC$ и $AG$ пересекаются на медиане $KD$ треугольника $ABK$, то $CG \parallel AB$.

Значит, $G$ – точка пересечения прямых $CF$ и $BK$. Утверждение задачи доказано.

**24.** Применим равенство задачи несколько раз:

$P(x, y) = P(x + y, y - x)=$

$= P((x + y) + (y - x), (y - x) - (x + y)) = P(2y, -2x)$.

Многочлен $P(x, y)$ есть сумма одночленов вида $a_{kl}x^ky^l$ (в частности, $a_{00}$ – свободный член). Среди всех коэффициентов $a_{kl}$, где $k + l > 0$, выберем наибольший по модулю. Соответствующий член имеет вид $Ax^my^n$. Подставим: $A(2y)^m(-2x)^n$. Получили коэффициент, по модулю больший $A$. Значит, $P(x, y)$ – константа.

**25.** Применим индукцию. При $n = 1$ имеем очевидное равенство. Пусть $n > 1$ и для всех меньших значений неравенство уже доказано. Пусть $\vec{s}$ – сумма векторов левой части неравенства. Можно считать, что $\vec{s} \neq 0$. Если векторы $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{s}$ не сонаправлены, то будем поворачивать вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ так, чтобы его проекция на $\vec{s}$ возрастала. При этом проекция на $\vec{s}$ суммы векторов будет возрастать (а значит, будет возрастать и длина этой суммы, т. е. левая часть неравенства). Таким образом мы добьемся или того, что конец вектора совпадет с началом следующего за ним по часовой стрелке вектора, или того, что вектор станет сонаправлен с $\vec{s}$. В первом случае можно заменить два «склеившихся» вектора на их сумму и применить предположение индукции. Во втором – рассмотреть вектор $\overrightarrow{A_3A_4}$ и поворачивать его.

**26.** Поскольку число $n^2 + 1$ не является точным квадратом, все его делители можно разбить на пары вида $\left(d, \left(n^2+1\right)/d\right)$. Значит, $\tau\left(n^2+1\right)$ четно. Если $n$ четно, то все делители $d$ числа $n^2 + 1$ нечетны и можно считать, что $d < n$. Получили: $\tau\left(n^2+1\right) < n$ при четных $n$.

Предположим, что при $n \geq N$ последовательность $\tau\left(n^2+1\right)$ возрастает. Так как число $\tau\left(n^2+1\right)$ четно, то при $n \geq N$ имеем $\tau\left((n+1)^2+1\right) \geq \tau\left(n^2+1\right) + 2$, откуда по индукции $\tau\left((N+k)^2+1\right) \geq \tau\left(N^2+1\right) + 2k$. При достаточно большом $k$ (таком, что $N + k$ четно) неравенства $N + k >$
$> \tau\left((N+k)^2+1\right) \geq \tau\left(N^2+1\right) + 2k$ дают противоречие.