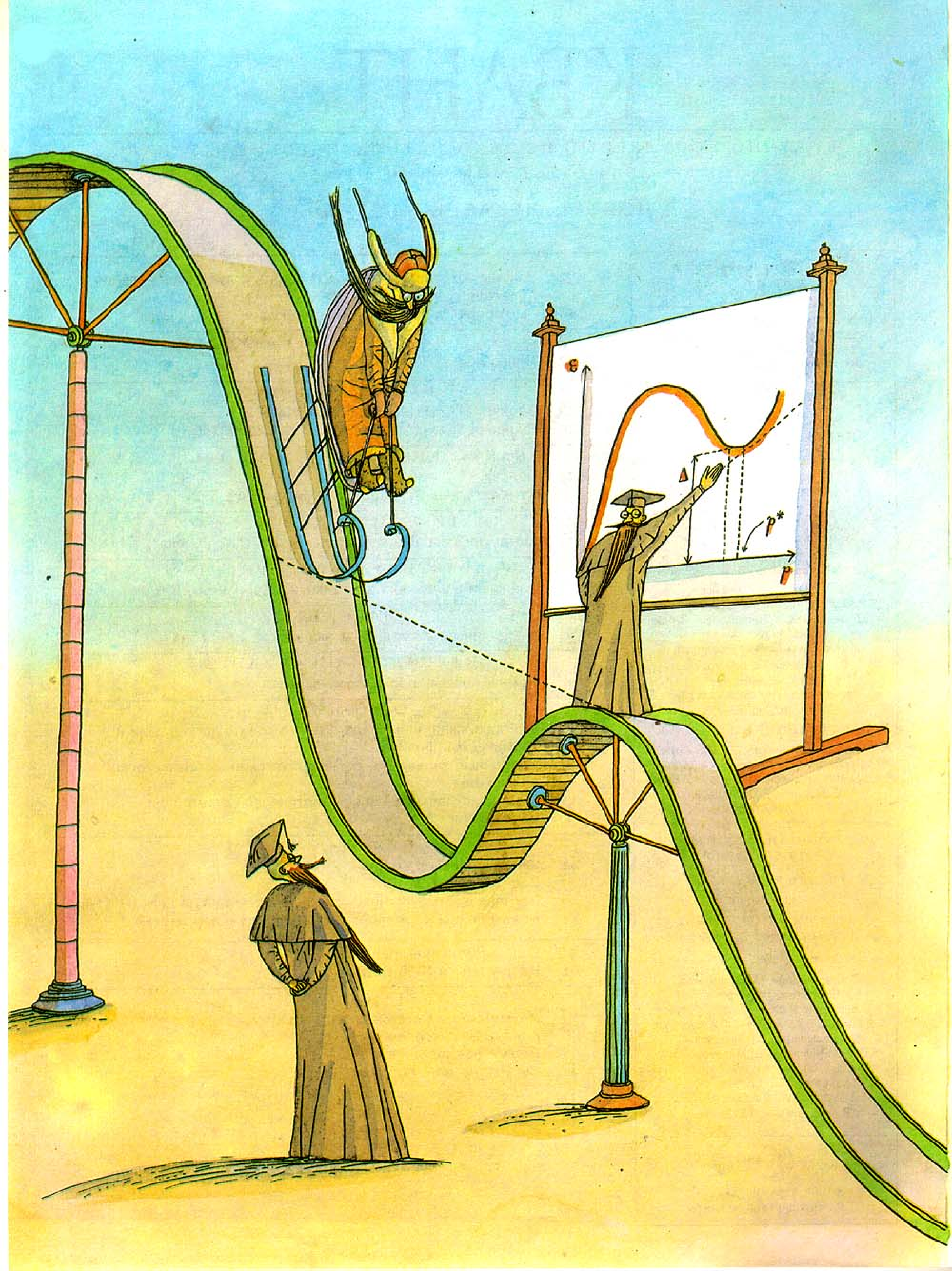
ε
Δ
p*
p

*Посвящается 90-летию известнейшего физика-теоретика нашего столетия Льва Давыдовича Ландау.*

# Законы сохранения помогают понять физические явления

**М.КАГАНОВ**

НАВЕРНОЕ, у многих читателей существование законов сохранения вызывает некий почтительный трепет: нечто запрещено. Не то чтобы кто-то не разрешил, а в действительности *не может быть, не происходит.*

Когда я решил написать эту статью, первое, что пришло в голову, даже перед мысленным взором возник некий рисунок (наверное, из школьного учебника физики) – это горка с санками, готовыми спуститься. Санки при спуске должны преодолеть подъем (рис.1). И мысль: санки надо поставить несколько выше

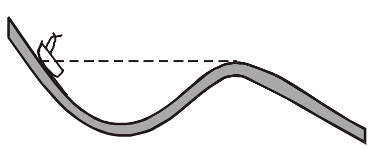

*Рис. 1. Санки не достигнут вершины холма, если их начальная скорость равна нулю*

— надо, чтобы хватило энергии преодолеть подъем. И необходимо учесть энергию, которая из-за трения превратится в тепло – потеряется... Вспомнились и какие-то иные случаи, когда анализ законов сохранения приводит к менее тривиальным выводам.

Неожиданно выплыл из памяти рассказ знакомого физика. Его пригласили на пост заведующего теоретическим отделом некоего НИИ, имевшего отношение к военному ведомству. Что удивило: обещали высокую зарплату, свободный режим ему самому и его сотрудникам и при этом требовали только одного – посещения заседаний технического совета. Мой знакомый не выдержал и спросил: «Зачем я вам нужен?» Последовал неожиданный ответ: «Нам необходим человек, который знает законы сохранения»...

В этой статье будет приведено несколько примеров – следствий из законов сохранения энергии и импульса. Большинство явлений, о которых пойдет речь, относятся к физике конденсированного состояния вещества (к макрофизике). Некоторые из них имеют непосредственное отношение к работам Л.Д.Ландау, которому в 1962 году была присуждена Нобелевская премия по физике «за пионерские исследования по теории конденсированных сред, особенно жидкого гелия».

Начнем мы, правда, издалека – с задачи об упругом столкновении частиц.

## Столкновение двух частиц разных масс

Слово «частица» не должно настораживать, вызывая ассоциации с протонами, нейтронами, мезонами и многими другими представителями того, что по традиции принято называть миром элементарных частиц (хотя эпитет «элементарный», похоже, весьма устарел). В нашем контексте частица – шарик, который может только перемещаться. Например, в нем не могут возбуждаться звуковые колебания.[1]

По-моему, столкновение двух шаров изучают в школе. Не будем рассматривать разные случаи, а ограничимся простейшим: частица массой $M$ покоится, а на нее со скоростью $\vec{v}_0$ налетает частица массой $m$. Что произойдет в результате столкновения, если столкновение лобовое? Ясно, что после удара обе частицы движутся вдоль оси $X$ (рис.2), а о том, что скорости и импульсы – векторы, можно не думать. Обозначим величины, относящиеся к частице с массой $m$ после столкновения малыми буквами

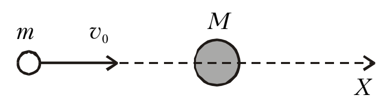


*Рис.2. Лобовое столкновение частиц*

($v$ – скорость, $p = mv$ – импульс), а к частице с массой $M$ – большими ($V$ – скорость, $P$ – импульс). Запишем законы сохранения импульса:

$$mv_0 = mv + MV \qquad (1)$$

и энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2}. \qquad (2)$$

Решив систему уравнений относительно скоростей $v$ и $V$, мы *все* будем знать о движении частиц после столкновения[2]. Выражения для $v$ и $V$ очень просты и наглядны:

$$v = v_0 - \frac{2Mv_0}{m+M},\ V = \frac{2mv_0}{m+M}. \qquad (3)$$

При $M = m$ налетающая частица весь свой импульс передает стоящей частице и останавливается, а стоявшая летит со скоростью $v_0$ ($V = v_0$, $v = 0$).

[1] *См. статью А.Гросберга и М.Каганова «Вокруг шарика» («Квант» №2 за 1996 г.).*

[2] *Тривиальное решение $v = v_0$, $V = 0$ опустим. Оно означает, что столкновение не состоялось.*

Иллюстрация А.Балдина

Чтобы эта задача не осталась лишь примером из школьной физики, придадим полученным формулам несколько другой вид. Если $\varepsilon_0 = \frac{mv_0^2}{2}$ и $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ – энергии частицы с массой $m$ до и после столкновения, а $p_0 = mv_0$ и $p = mv$ – ее импульсы, то

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{4M/m}{(1+M/m)^2}, \text{ где } \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0,$$

$$\frac{\Delta p}{p_0} = -\frac{2M/m}{1+M/m}, \text{ где } \Delta p = p - p_0. \tag{4}$$

Пусть масса $M$ покоящейся до столкновения частицы значительно превосходит массу $m$ налетающей на нее частицы ($M \gg m$). Тогда

$$\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_0} \simeq 4\frac{m}{M} \ll 1, \ \frac{\Delta p}{p_0} \simeq -2. \tag{5}$$

Словами: легкая частица при столкновении с тяжелой, существенно изменяя свой импульс, почти не изменяет энергии. На научном жаргоне: столкновение легкой частицы с тяжелой *квазиупруго* (почти упруго; упругое столкновение – столкновение без передачи энергии, как при $M \to \infty$).

Теперь можно рассмотреть интересную, на мой взгляд, задачу из макрофизики. Представим себе ящик, наполненный газом тяжелых частиц (с массой $M$). Они, конечно, движутся, как им положено: если температура газа $T$, то средняя величина скорости частиц равна $V_T = \sqrt{\frac{2k_Б T}{M}}$, где $k_Б$ – постоянная Больцмана (скорость тем меньше, чем тяжелей частицы). В этот ящик «впрыскиваются» струи газа легких частиц (с массой $m \ll M$), причем энергия движения частиц в струях в расчете на одну частицу $\varepsilon$ больше энергии теплового движения тяжелых частиц $k_Б T$. (Здесь $\varepsilon$ – не энергия теплового движения: все частицы, возможно, имеют одну и ту же скорость $v_0$, а $\varepsilon = \frac{mv_0^2}{2}$.) «Впрыснули» газовые струи и закрыли ящик. Цель: изучить, что будет происходить дальше.

Чтобы было проще рассуждать, будем считать, что содержимое ящика полностью отгорожено от внешнего мира, а число «впрыснутых» легких частиц равно числу тяжелых. На это условие обратите особое внимание, читая последние абзацы этого раздела.

Легкие частицы сталкиваются с тяжелыми и друг с другом. При столкновении друг с другом они обмениваются энергиями и импульсами. Если бы тяжелых частиц не было вовсе, в газе легких частиц установилось бы равновесное распределение, причем температура газа соответствовала бы энергии движения частиц в струях. Если полный суммарный импульс частиц во всех струях не был равен нулю при «впрыскивании», то он обратится в ноль за счет столкновений (в том числе и со стенками). Время, которое пройдет после впрыскивания до установления равновесия, называется *временем релаксации.* Обозначим его буквой $\tau$.

Что будет происходить, если в ящике есть тяжелые частицы? Сталкиваясь с ними, легкие частицы будут существенно изменять свой импульс. Тяжелые частицы при этом почти ничего не «почувствуют» – их скорость после столкновения практически не изменится (см. формулы (3)). Однако легким частицам для потери полного импульса уже нет необходимости долетать до стенок. Даже если ящик бесконечно большой, постепенно движение струй прекратится, и легкие частицы будут двигаться беспорядочно. Это означает, что суммарный импульс газа легких частиц обратился в ноль. Время, которое для этого необходимо, называется *временем релаксации импульса*. Обозначим его так: $\tau_p$.

Столкновения с тяжелыми частицами, как мы знаем, почти не изменяют энергии легких частиц, т.е. они почти не передают свою энергию тяжелым частицам. Поэтому процесс релаксации в газе легких частиц будет идти так. Быстро, за время $\tau_p$, обратится в ноль суммарный импульс легких частиц. Быстро в газе легких частиц установится равновесное распределение по энергиям (за счет столкновений легких частиц друг с другом), время этого процесса назовем $\tau_{вн}$.[3] Иными словами, за время $\tau_{вн}$ в газе легких частиц установится температура $T_л$, соответствующая энергии легких частиц в струях. По нашему предположению $T_л > T$, где $T$ – температура тяжелых частиц. Потом медленно, за счет квазиупругих столкновений между легкими и тяжелыми частицами, будет идти процесс выравнивания температур в смеси двух газов. В конце концов установится единая температура. На это понадобится время $\tau_\varepsilon$, значительно превосходящее $\tau_p$ и $\tau_{вн}$. Оно называется *временем энергетической релаксации.*

Перечитайте написанное и вы убедитесь, что описанный «сценарий» релаксации смеси газов основан на формулах (5) – следствиях законов сохранения при $M \gg m$. Но при чем здесь твердое тело, если речь шла о газах?

Пусть легкие частицы — это электроны, а тяжелые – примеси в полупроводнике. Ясно, что рассеяние электронов на примесях, которые в тысячи раз тяжелее электронов, происходит *почти упруго*, и релаксация в полупроводниках происходит приблизительно так, как мы описали выше.

В физике полупроводников существует целый раздел, носящий название *горячие электроны.* Горячие они потому, что их температуры выше, чем температура ионов кристаллической решетки. Теперь мы знаем, почему это возможно. Понимание свойств горячих электронов важно при практическом использовании полупроводников, а также при решении задач физики полупроводников – активно развивающейся области физики твердого тела.

И в физике плазмы, ведь плазма – смесь электронов и ионов, понимание почти упругого характера столкновений электронов с ионами тоже необходимо.

Так решение простой школьной задачи о столкновении двух шариков разных масс оказывается полезным в самых различных областях физики. Заметим (трудно удержаться): плазма — самое распространенное состояние вещества во Вселенной.

## Частицы-волны, волны-частицы

В классической (доквантовой) физике описание почти любого явления требовало выбора «исполнителя»: либо частица, либо волна. Оказалось, понятия «частица» и «волна» не исключают друг друга. Микрочастицы иногда ведут себя как волны, а волны обладают свойствами частиц. Совокупность свойств, из которых

[3] *Индекс «вн» – сокращение слова «внутреннее».*

одни надо описывать с помощью корпускул, а другие – с помощью волн, получили название корпускулярно-волнового дуализма. «Переводом» с корпускулярного языка на волновой служат соотношения де Бройля

$$\vec{p} = \hbar \vec{k},\ \varepsilon = \hbar\omega. \qquad (6)$$

Здесь $\vec{p}$ и $\varepsilon$ – импульс и энергия – характеристики движения частицы; $\vec{k}$ и $\omega$ – волновой вектор[4] и частота – характеристики волны; $\hbar$ – знаменитая постоянная Планка ($\hbar \approx \approx 10^{-34}$ Дж · с).

Соотношения де Бройля (6) могут служить и для «перевода» с волнового языка на корпускулярный: для этого их надо прочесть справа налево. Каждой волне можно поставить в соответствие частицу. Часто при этом говорят не «частицу», а квазичастицу (почти, не совсем частицу), тем самым подчеркивая, что все же это не настоящая частица, а квант – порция энергии волны, равная $\hbar\omega$. Квант электромагнитной (световой) энергии – квазичастица *фотон*, квант звуковой энергии – *фонон.*

Введя квазичастицы, легко пользоваться законами сохранения энергии и импульса не только при столкновениях частиц, но и в том случае, когда в «реакции» принимают участие волны. Простейший пример – фотоэффект. Световая волна, падающая на поверхность металла, выбивает из него электроны. Рисунок 3 показывает, как это происходит: поглотив фотон, электрон преодолевает потенциальный барьер, который держит его внутри металла. Закон сохранения энергии в этом случае особенно прост:

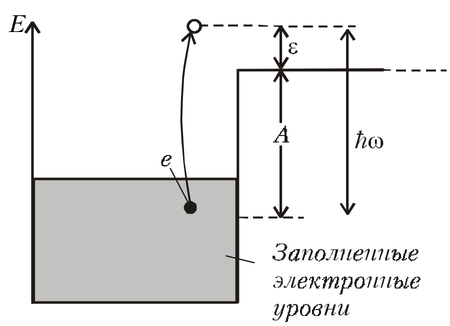


*Рис.3. Поглотив фотон с энергией $\hbar\omega$, электрон покидает металл; А—работа выхода, т.е. наименьшая энергия, которую надо затратить, чтобы «вытащить» электрон из металла*

$$\varepsilon = \hbar\omega - A. \qquad (7)$$

Он утверждает, что энергия электрона линейно зависит от частоты. Уравнение (7) называют соотношением Эйнштейна. Эйнштейн первым применил понятие фотона (кванта света) к фотоэффекту и тем объяснил экспериментальные факты, в корне противоречившие классической физике. Импульс фотона в этом случае можно не учитывать, так как он очень мал ($\hbar k = \hbar\omega/c$, где $c$ – скорость света), и воспринимается всем металлическим образцом, а не одним электроном.

Сейчас, когда квантово-механические представления прочно вошли не только в сознание профессионалов, но и всех, интересующихся физикой, трудно себе представить значение работы Эйнштейна по теории фотоэффекта. Для нас главное, что составило славу Эйнштейна, – это создание им теории относительности, изменившей наши представления о пространстве и времени. Наверное, для многих будет неожиданностью узнать, что Нобелевскую премию Эйнштейн получил «за важные физико-математические исследования, особенно за открытие законов фотоэлектрического эффекта». Это произошло в 1921 году, когда и специальная, и общая теория относительности были уже сравнительно давно построены.

## Эффект Комптона

Явление рассеяния электромагнитных волн электронами с изменением длины волны названо в честь открывшего его американского ученого А.Комптона (Нобелевская премия 1927 г.).

Согласно волновым представлениям, электромагнитная волна, частота которой $\omega$, заставляет электрон колебаться с той же частотой. Колеблясь, электрон излучает, естественно, электромагнитные волны той частоты, с которой он колеблется. Это и есть рассеянная волна. Тем самым частота рассеянной волны совпадает с частотой падающей на электрон волны.

Однако, если рассматреть рассеяние как столкновение фотона с электроном и учесть, что фотон обладает энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar\omega/c$ (см. формулы (6)), то из законов сохранения немедленно следует, что частота фотона должна при рассеянии уменьшаться (а длина волны увеличиваться). Действительно, поскольку электрон приходит в движение, его энергия увеличивается, а энергия фотона должна уменьшиться (на величину приобретенной электроном кинетической энергии). Записав законы сохранения энергии и импульса, можно получить

$$\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right), \qquad (8)$$

где $\lambda$ и $\lambda'$ – длины волн света до и после рассеяния, $m_e$ – масса электрона, а $\theta$ – угол рассеяния.

Величину $2\pi\hbar/\left(m_e c\right)$ называют комптоновской длиной волны электрона. Она равна $2{,}4 \cdot 10^{-12}$ м. Это очень маленькая величина. Ясно, что относительное изменение волны $\Delta\lambda/\lambda$ заметно только в случае очень коротких волн. Поэтому Комптон-эффект фактически наблюдается при рассеянии рентгеновского и $\gamma$-излучений. Вывод формулы (8) – простое упражнение. Удобно считать, что электрон, с которым сталкивается фотон, покоится. Однако, учитывая, что энергичный фотон может заставить электрон двигаться достаточно быстро, надо использовать релятивистскую связь между энергией и импульсом электрона ($\varepsilon = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}$).

Мы настойчиво рекомендуем вывести формулу (8). Согласие экспериментально наблюденных фактов именно с этой формулой было первым непосредственным доказательством корпускулярных свойств электромагнитных волн, возможности введения «настоящей» частицы – *фотона* с полагающимися частице энергией и импульсом (1922 г.). Ваших знаний уже достаточно, чтобы вывести такую важную формулу!

## Частицы излучают волны

До сих пор, говоря о столкновениях, мы рассматривали *истинное* столкновение: до события и после события существуют две частицы. Ни тип частиц, ни их число не менялись. Но в физике термином «столкновение» часто пользуются весьма свободно. Например, на атом налетает фотон (фотон сталкивается с атомом). В результате *столкновения* фотон вовсе исчезает, а атом переходит в возбужденное состояние. Или сталкиваются ион и электрон. Результат стол-

[4] *Волновой вектор равен по модулю, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, где $\lambda$ – длина волны, а направлен по направлению распространения волны.*

кновения – появление нейтрального атома. Примеры легко умножить.

А может ли элементарная частица (в данном случае это – бесструктурная частица, она может только перемещаться в пространстве), столкнувшись с фотоном или какой-нибудь другой квазичастицей, «проглотить» ее? Или: может ли элементарная частица «родить» какую-либо из квазичастиц? Этот вопрос можно задать на «волновом языке»: может ли частица, двигающаяся с постоянной скоростью, излучить волну (при такой формулировке не обязательно использовать термин «столкновение»)?

Одно общее замечание. Элементарные процессы обратимы. Что это означает? В данном случае следующее: если частица может «проглотить» квазичастицу, то может ее и «родить». Достаточно исследовать один из процессов: либо рождение квазичастицы (излучение волны), либо поглощение квазичастицы. Остановимся на рождении (излучении).

Думаю, ни у кого не вызовут сомнений уравнения, которые будут сейчас предъявлены:

$$\vec{p} = \vec{p}\,' + \hbar\vec{k},\ \varepsilon\left(\vec{p}\right) = \varepsilon\left(\vec{p}\,'\right) + \hbar\omega\left(\vec{k}\right). \qquad (9)$$

На всякий случай, все же скажем словами: частица, импульс которой $\vec{p}$, а энергия $\varepsilon = \varepsilon\left(\vec{p}\right)$, рождает квазичастицу – излучает волну с волновым вектором $\vec{k}$ и частотой $\omega$ ($\omega$ – функция $\vec{k}$). Это событие может произойти, если законы сохранения (уравнения (9)) выполняются. Их мы и должны проанализировать.

Конечно, для того чтобы иметь возможность проанализировать уравнения (9), необходимо знать зависимости входящих в них функций от их аргументов. Много интересного и важного можно обнаружить, не выходя за пределы простых соотношений

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m},\ \omega = uk. \qquad (10)$$

Вы, надеюсь, понимаете, что первое равенство тождественно более привычному $\varepsilon = \frac{mv^2}{2}$ (см. (2)), так как $\vec{p} = m\vec{v}$ ($m$ – масса излучающей частицы). Второе равенство может относиться и к фотону (тогда $u$ – скорость света), и к фонону (тогда $u$ – скорость звука).

Итак, импульс частицы после излучения $\vec{p}\,'$ можно вовсе исключить:

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{\left(\vec{p} - \hbar\vec{k}\right)^2}{2m} + \hbar\omega\left(\vec{k}\right).$$

Отсюда, учитывая, что скалярное произведение двух векторов $\vec{p}$ и $\vec{k}$ есть $\vec{p}\vec{k} = pk\cos\theta$, где $\theta$ – угол

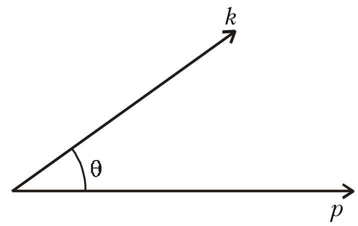


*Рис.4. Направление полета квазичастицы (угол θ ) отсчитывается от импульса частицы $\vec{p}$.*

между этими векторами (рис.4), имеем

$$\frac{\hbar pk\cos\theta}{m} = \hbar\omega(k) + \frac{\hbar^2k^2}{2m},$$

или

$$vk\cos\theta = \omega(k) + \frac{\hbar k^2}{2m}.$$

Условие излучения сводится к утверждению, что $\cos\theta$ не должен по модулю превышать единицу, т.е.

$$\boxed{-1 \le \cos\theta = \frac{\omega(k)}{kv} + \frac{\hbar k}{2mv} \le 1.} \qquad (11)$$

Условие (11) мы взяли в рамку неспроста. Обсуждение его – главное содержание оставшейся части статьи.

## Классический предел. Излучение Черенкова

Условие (11) допускает переход к классической физике (пренебрежение квантовыми эффектами): для этого просто(!) надо положить $\hbar = 0$. Конечно, потом надо убедиться, что делать это дозволено (см. ниже). Тогда условие излучения выглядит совсем просто:

$$v > \frac{\omega}{k} = v_{\text{ф}}. \qquad (12)$$

Здесь $v_{\text{ф}}$ – фазовая скорость волны. Частица способна излучить волну, если ее скорость превышает фазовую скорость этой волны.

В 1934 году аспирант С.И.Вавилова П.А.Черенков обнаружил необычное излучение. Оказалось, электроны, летящие через вещество со сверхсветовой скоростью, излучают свет. Теорию этого излучения, получившего название черенковского, построили И.Е.Тамм и И.М.Франк в 1937 году (Нобелевская премия 1958 г. «за открытие и объяснение эффекта Вавилова—Черенкова» присуждена Тамму, Франку и Черенкову).

Как известно, скорость света в пустоте $c$ – предельная скорость движения материальных тел, здесь частицы не могут лететь со скоростью, большей $c$. Со *сверхсветовой* скоростью они могут лететь лишь в *среде,* где скорость света $u$ меньше скорости света в пустоте.

Проверим, можно ли было пренебречь вторым слагаемым в правой части условия (11). Считаем: $v \approx c$, $m = m_e$ – масса электрона, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (здесь $\lambda$ – длина волны излученного света); для отброшенного члена получаем: $\sim\frac{\hbar}{m_e c\lambda}$, т.е. отброшенное слагаемое есть отношение комптоновской длины волны к длине волны света. Но, как мы уже знаем, это отношение очень мало для волн видимого света. Пренебрежение оправдано.

Надо сказать, теория черенковского излучения строилась и обычно строится на основе классического (неквантового) рассмотрения. Вывод условия излучения (12) проще, если использовать квантовый подход.

Тяжелое тело, пуля, самолет, ракета не могут лететь со сверхсветовой скоростью (возможно, пока). А вот со сверхзвуковой *уже* могут. В условии (11) в случае макроскопического тела вторым слагаемым заведомо можно пренебречь: оно столь мало, что о нем попросту не стоит говорить. Мы приходим к естественному выводу: если тело летит со скоростью, превышающей скорость звука в воздухе, то оно излучает звуковые волны. О самолете в таких случаях говорят, что он преодолел звуковой барьер. Этот факт можно засвидетельствовать на земле: до земли доходит «пакет» волн, испущенных самолетом. Часто это приводит к тому, что в домах дребезжат окна, а иногда и выпадают.

## Электроны металла – причина затухания звука

Возбудить звук в металле проще простого: например, можно стукнуть по его поверхности – побежит сгусток волн от поверхности в глубину. Если мы хотим возбудить звук определенной частоты, надо к поверхности металла приложить источник звука; обычно используют кварц, который колеблется под воздействием электромагнитных излучений.

Итак, по металлу бежит звуковая волна. Постепенно она затухнет. То расстояние, на котором ее амплитуда уменьшится в $e$ раз, называется *длиной затухания.* Ее можно измерить, что и делается с большой точностью в самых различных условиях: изменяют температуру металла, вносят металл в магнитное поле, заставляют перейти в сверхпроводящее состояние и т.д., и т.п. Зачем нужны подобные эксперименты? Затем, что длина затухания очень чувствительна к «устройству» металла. А знать, как «устроен» металл, важно. Думаю этот тезис не вызовет возражений.

Звук в твердом теле – волна колебаний атомных частиц относительно их положений равновесия. В металле атомные частицы – ионы, окруженные «газом» электронов. Принимают ли участие электроны в звуковых колебаниях? Да. Ионы и электроны колеблются так, что равновесие между ними практически не нарушается: каждый элемент объема металла остается при этом нейтральным.

Акустические свойства электронных проводников – важная и интересная глава квантовой физики твердого тела. О ней хотелось бы рассказать подробно отдельно. Здесь мы ответим лишь на один вопрос: принимают электроны участие в поглощении звука металлом или нет? Ответ: принимают. И более того: при низких температурах и достаточно высокой частоте звука (когда он уже не звук, а ультразвук) электроны – главные поглотители звуковых волн. В данном случае лучше говорить — фононов.

Если условие (11) определяет возможность поглощения фонона электроном, то $\omega(k) = uk$, где $u$ – скорость звука. Условие (11) принимает вид

$$-1 \le \cos\theta = \frac{u}{v} + \frac{\hbar\omega}{2muv} \le 1, \quad (13)$$

где $v$ и $m$ – скорость и масса электрона. Максимальная скорость электронов в металлах (так называемая фермиевская скорость) по «земным» масштабам велика[5]: $v \approx 10^6$ м/с, т.е. $u \ll v$. Это – важный факт. Запомним его. Теперь оценим квантовое слагаемое. Удобно его переписать так: $\frac{\hbar\omega}{mu^2}\frac{u}{v}$. Скорость звука в металлах порядка $(2-5)\cdot 10^3$ м/с. Поэтому для частот $\omega < 10^{11}$ с$^{-1}$ квантовый член мал по сравнению с отношением $u/v$. Значит, для обычного звука и даже ультразвука квантовое слагаемое (опять!) очень мало. А так как скорость электрона значительно превышает скорость звука, то электрон «легко» поглощает фонон. Следовательно, изучая поглощение звука, мы можем узнать об электронах много интересного.

## Затухание Ландау

Не нравится мне название этого раздела. Точнее, давно не нравится название явления, которое так названо. Особенно грустно оно звучало в те шесть лет после автомобильной катастрофы (1962 г.), в результате которой шесть лет затухала жизнь Ландау. Но ничего не попишешь. Язык (в данном случае — научная терминология) закрепил такое наименование.

Плазма уже упоминалась в статье. Плазма – нейтральная (в среднем) смесь заряженных частиц разных знаков. Например, положительных ионов и отрицательных электронов. Но нам придется познакомиться с еще одним термином: *бесстолкновительная* плазма. Этот термин не означает, что частицы плазмы никогда не сталкиваются. Бесстолкновительной плазму называют тогда, когда столкновений можно не учитывать. Например, если время между столкновениями значительно больше, чем период тех полей, поведение которых в плазме мы изучаем.

Для описания свойств бесстолкновительной плазмы были сформулированы в 1938 году специальные уравнения. Они получили имя своего создателя – их называют уравнениями Власова[6]. Хотя частицы (по предположению) не сталкиваются, нельзя считать, что они не взаимодействуют. Электромагнитное поле зависит от движения заряженных частиц, а само поле влияет на их движение: возникает своеобразная зависимость всех от всех – коллективное взаимодействие заряженных частиц между собой. Эти уравнения оказались важным помощником в огромном числе задач физики плазмы. С их помощью можно было бы рассчитывать многое: от электронных приборов, составным элементом которых служит электронно-ионный пучок, до свойств ионосферы или межгалактического газа. Но… обратите внимание на частицу «бы». Дело в том, что при получении решений возникала большая трудность. Оказалось: электромагнитные волны с волновым вектором $\vec{k}$ и частотой $\omega$ такими, что $\omega = \vec{k}\vec{v}$, где $\vec{v}$ – скорость какой-либо из частиц плазмы, описать невозможно, или, точнее, приходилось использовать искусственный, не оправданный физической природой математический прием (физики-теоретики этого очень не любят!).

Частицы в плазме, как в любом газе, движутся хаотически с самыми различными скоростями. Распределение по скоростям зависит от температуры: в частности, чем плазма горячей, тем средняя скорость частиц больше. В очень холодной плазме, описываемой квантовыми законами, скорости электронов ограничены фермиевской скоростью (см. предыдущий раздел). Отсюда ясно, что пользоваться уравнениями Власова, не внеся в них какую-то новую физическую идею, если не невозможно, то очень неудобно. Как только встречается волна, характеристики которой ($\omega$ и $\vec{k}$) удовлетворяют условию

$$\omega = \vec{k}\vec{v}, \quad (14)$$

амплитуду такой волны мы рассчитать не можем. Или, другими словами: мы не умеем рассчитывать такие волны, фазовая скорость которых меньше скорости какой-либо из частиц плазмы.

Новую физическую идею в физику плазмы внес Ландау в своей работе 1946 года. Ее, как большинство теорфизических работ, невозможно изложить, ограничиваясь теми скромными знаниями, которыми нам приходится довольствоваться. Но понять

[5] *См. статью М.Каганова «Как устроены металлы?» («Квант» №2 за 1997 г.).*

[6] *А.А.Власов получил Ленинскую премию 1970 года за цикл работ по плазме.*

физическую природу происходящего в бесстолкновительной плазме можно.

Давайте проквантуем волну поля и посмотрим, может ли «фотон» поглотиться частицами плазмы. Для выяснения этого, как мы знаем, надо посмотреть, удовлетворяются ли законы сохранения энергии и импульса. Сведенные вместе, они запишутся так:

$$\varepsilon\left(\vec{p}\right)+\hbar\omega=\varepsilon\left(\vec{p}+\hbar\vec{k}\right).$$

При расчете электромагнитного поля надо учитывать взаимодействие с ним *всех* частиц. Это означает, что расчет предполагает суммирование по всем частицам (интегрирование по всем импульсам). Поэтому безразлично, возможности какой частицы рассматривать. Давайте займемся частицами, импульс которых равен $\vec{p}\,' = \vec{p} + \frac{\hbar\vec{k}}{2}$. Тогда уравнение, описывающее законы сохранения, оказывается симметричным:

$$\varepsilon\left(\vec{p}+\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)-\varepsilon\left(\vec{p}-\frac{\hbar\vec{k}}{2}\right)=\hbar\omega\,. \quad (15)$$

Так как $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$, а $\frac{\vec{p}}{m}=\vec{v}$, то из (15) следует условие (14).

Итак, условие (14) – условие возможности поглощения «фотона». Поглощение должно приводить к затуханию электромагнитной волны с параметрами, удовлетворяющими условию (14). Аппарат теоретической физики позволяет вычислить коэффициент затухания. Его и называют затуханием Ландау.[7]

Во многих случаях затухание Ландау – важный механизм, ограничивающий амплитуду электромагнитного поля. Иногда учет его необходим для наведения порядка в теоретических уравнениях. И то и другое весьма важно.

Обратите внимание, что поглощение звука электронами металла, описанное в предыдущем разделе, по сути дела, проявление затухания Ландау при взаимодействии звуковой волны с электронами проводимости. Должен сказать, это не сразу было понято.

[7] *Слово «фотон» взято в кавычки, так как речь идет не об электромагнитной волне в вакууме. Квазичастицу в плазме называют плазмоном.*

## Критерий сверхтекучести

Этот 1998 год можно считать юбилейным не только потому, что отмечается девяностолетие Ландау. Шестьдесят лет назад Петр Леонидович Капица открыл сверхтекучесть – способность жидкого гелия при температурах ниже 2,19 К (гелий II) протекать без вязкости через тонкие капилляры. Обнаружение движения жидкости без трения, а также понимание того, что в гелии при низких температурах возможно два типа движения: обычное (нормальное, как говорят) и сверхтекучее, позволяет объяснять большое число удивительных свойств гелия («за открытия в области физики низких температур» П.Л.Капица удостоин Нобелевской премии 1978 г.).

В 1941 году Л.Д.Ландау построил теорию сверхтекучести. Одно из основных положений этой теории – *критерий сверхтекучести*, о котором мы постараемся рассказать, используя законы сохранения.

Задумаемся, что означает *течение без трения*? Это означает, что энергия упорядоченного движения жидкости не переходит в тепло, не рассеивается – значит, движение не тормозится, не затухает.

Тепловое движение – это беспорядочное движение атомов, молекул. В разных агрегатных состояниях атомные частицы движутся по-разному: в твердых телах колеблются вокруг своих положений равновесия, в газах движутся как свободные частицы, изредка сталкиваясь с себе подобным. В обычной жидкости тепловое движение частиц сложно: они и колеблются, и перемещаются в пространстве на большие расстояния. Но в гелии II, в гелии при температуре ниже 2,19 К, ситуация иная. Переход в сверхтекучее состояние означает возникновение своеобразного коллективного состояния всех атомов гелия. Атомы гелия в этом новом состоянии не могут двигаться независимо друг от друга. Единственное доступное им движение представляет собой звуковые волны. Звуковые волны, как мы знаем, можно проквантовать. Так вводятся фононы. Если нам известна зависимость частоты $\omega$ звуковой волны от волнового вектора $\vec{k}$, то, тем самым, известна зависимость энергии фонона $\varepsilon$ от его импульса $\vec{p}$:

$$\varepsilon=\varepsilon(p). \quad (16)$$

Так как гелий изотропен, энергия не зависит от направления импульса, а зависит только от его величины.

Теперь тепловое движение в гелии при низкой температуре получает наглядное представление: при температуре $T \neq 0$ в массе гелия «растворен» газ фононов. Чем температура выше, тем фононов больше. Надеюсь, вы понимаете, что сказанное – удобный, наглядный образ. Не более того. Но и не менее, так как используя это представление, можно вычислить зависимость различных характеристик гелия от температуры и выяснить, как зависит энергия фонона от импульса, т.е. построить функцию (16). Она показана на рисунке 5.

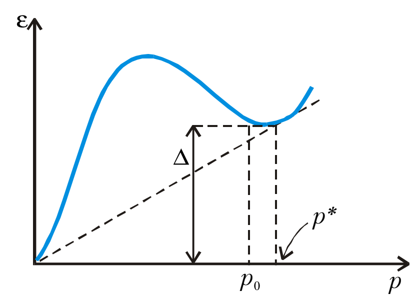


*Рис.5. Зависимость энергии фонона в гелии II от импульса. В отмеченной точке (при $p = p^*$) прямая, проведенная из начала координат, касается кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$*

Надо подчеркнуть, что зависимость $\varepsilon$ от $p$ при $p \to 0$ известна была априори: малый импульс соответствует малому волновому вектору $k$ и, следовательно, большой длине волны $\lambda$ ($k=2\pi/\lambda$). Но при $\lambda \gg a$, где $a$ – межатомное расстояние, волна, о которой идет речь, – обычная звуковая волна. Скорость ее хорошо известна: $u \approx 240$ м/с, и

$$\varepsilon = up\,. \quad (17)$$

При импульсах, близких к минимуму энергии,

$$\varepsilon \approx \Delta + \frac{(p-p_0)^2}{2m^*},\ p\approx p_0, \quad (18)$$

где $p_0/\hbar = 1{,}9\cdot10^6$ м$^{-1}$, $\Delta = 8{,}7$ К, $m^* = 0{,}16m_{\mathrm{He}}$ ($m_{\mathrm{He}}$ – масса атома гелия).

Значения параметров $p_0$, $\Delta$ и $m^*$ подобраны так, чтобы наилучшим образом описать температурные зависимости характеристик гелия II.

Эти значения удалось подтвердить непосредственно проверкой, «построив» функцию (16). И в этом помогли законы сохранения. Исследовали неупругое рассеяние нейтронов гелием вблизи абсолютного нуля температуры (1961–1964 гг.). Неупругое рассеяние – это рассеяние, при котором нейтрон теряет (или приобретает) энергию. Остановимся на рассеянии с потерей энергии.

На что нейтрон расходует энергию, пролетая через гелий? На «рождение» фонона. Значит, согласно законам сохранения,

$$E\left(\vec{P}\right) = E\left(\vec{P}'\right) + \varepsilon(p),\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p},$$

или

$$\varepsilon\left(\vec{P} - \vec{P}'\right) = E\left(\vec{P}\right) - E\left(\vec{P}'\right). \quad (19)$$

Здесь $\vec{P}$ и $E\left(\vec{P}\right)$ – импульс и энергия нейтрона *до* рассеяния, $\vec{P}'$ и $E\left(\vec{P}'\right)$ – после. Так как $E\left(\vec{P}\right) = \frac{P^2}{2m_н}$, а $\vec{P} = m_н\vec{v}$ ($m_н$ – масса нейтрона), то, зная скорость рассеиваемых нейтронов и измерив скорость нейтрона, рассеянного под определенным углом $\theta$, можно определить и величину $\left|\vec{P} - \vec{P}'\right| = \sqrt{P^2 + P'^2 - 2PP'\cos\theta}$, и разность энергий нейтронов, равную энергии фонона. Измерения с большой точностью подтвердили найденные значения.

Теперь есть возможность сформулировать критерий сверхтекучести. Мы покажем, что вид зависимости $\varepsilon = \varepsilon(p)$ (формула 16), изображенной на рисунке 5, свидетельствует: если скорость течения жидкости гелия меньше некоторого критического значения $v_{кр}$, то при взаимодействии со стенкой капилляра в жидкости не может «зародиться» фонон. А это означает, что энергия движения жидкости не может превратиться в тепловую энергию. Следовательно, при $v < v_{кр}$ жидкий гелий течет без трения – осуществляется сверхтекучесть.

Пусть по капилляру со скоростью $-\vec{v}$ течет гелий при $T < 2{,}19$ К. Перейдем в систему координат, в которой гелий покоится; капилляр движется относительно гелия со скоростью $\vec{v}$. Предположим, что *«родился» фонон* (мы найдем условие, когда такой процесс возможен). В этом случае должны быть выполнены законы сохранения

$$\frac{P^2}{2M} = \frac{P'^2}{2M} + \varepsilon(p),\ \vec{P} = \vec{P}' + \vec{p}, \quad (20)$$

где $\vec{P} = M\vec{v}$ – импульс капилляра, $M$ – его масса, остальные обозначения прежние. Подставим вместо $\vec{P}'$ его значение, возведем в квадрат и получим

$$\vec{v}\vec{P} = \varepsilon(p). \quad (21)$$

Мы отбросили квадратичный по $p$ член. Он так мал, что его можно было бы не упоминать: ведь $M$ – масса капилляра, а энергия $\varepsilon(p)$, с которой надо сравнить это слагаемое, – энергия *одного* фонона.

Равенство (21) может быть выполнено, если существует направление – угол $\theta$, куда будет двигаться «родившийся» фонон:

$$\cos\theta = \frac{\varepsilon(p)}{pv}.$$

Следовательно, скорость $v$ должна превосходить минимальное значение $\varepsilon/p$. Таким образом, фонон может «родиться», если

$$v > \min\frac{\varepsilon(p)}{p},$$

и не может «родиться», если

$$v < \min\frac{\varepsilon(p)}{p},$$

т.е.

$$v_{кр} = \min\frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (22)$$

Если $\min\frac{\varepsilon(p)}{p} = 0$, то никакой сверхтекучести нет: при любой скорости течения энергия течения превращается в тепловую. Если $v_{кр} \neq 0$, то при $v < v_{кр}$ жидкость течет без трения: энергия течения не может превратиться в тепло.

Нетрудно убедиться, что зависимость $\varepsilon = \varepsilon(p)$, изображенная на рисунке 5, приводит к $v_{кр} \neq 0$. Значение $v_{кр}$ легко найти графически: оно определяется тем значением $p = p^*$, при котором касательная к кривой $\varepsilon = \varepsilon(p)$, как показано на рисунке 5, есть прямая, вышедшая из начала координат (те, кто умеют дифференцировать, легко могут в этом убедиться).

Зависимость $\varepsilon = \varepsilon(p)$ называют спектром гелия. Критерий сверхтекучести Ландау утверждает, что жидкость может быть сверхтекучей, если ее спектр удовлетворяет условию $\min\frac{\varepsilon(p)}{p} \neq 0$. Этот критерий может быть применен не только к гелию. Например, он сыграл важную роль в понимании природы сверхпроводимости.

Надо признаться, что трудно достичь значения критической скорости, вычисленной по формуле (22), – ее значение порядка 60 м/с. Обычно сверхтекучее движение «срывается» из-за возникновения турбулентности – завихрений, которые сравнительно легко появляются в отсутствие вязкости. Но если бы $\min\frac{\varepsilon(p)}{p} = 0$, то ни при какой скорости невозможно было бы сверхтекучее течение.

## Заключение

Среди подарков, врученных Л.Д.Ландау в день его пятидесятилетия в 1958 году, были «Скрижали»: две мраморные доски, на которых воспроизведены Заповеди Ландау – десять (как положено заповедям) классических формул, выведенных Ландау. Их от имени Института атомной энергии подарил юбиляру академик Исаак Константинович Кикоин. Среди Заповедей под номером 7 – знакомая нам кривая и формулы, ее описывающие.

В тот же день Илья Михайлович Лифшиц (он был известным филателистом) от имени харьковских физиков вручил Ландау «конверт первого дня» – почтовый конверт с маркой, якобы выпущенные в Дании, на родине Нильса Бора, которого Ландау считал своим учителем. На конверте – та же кривая.

Когда создавалась книга «Воспоминания о Л.Д.Ландау» (М.: Наука, 1988), составители в Приложении поместили фотографии «Скрижалей» с комментарием И.К.Кикоина (из журнала «Природа» №1 за, 1968 г.). В комментарии к Заповеди 7 читаем: «Одна из наиболее блестящих работ Ландау – теория сверхтекучести гелия II. Работы Ландау в этой области не только объяснили загадочное явление, впервые открытое П.Л.Капицей, но определили создание нового раздела теоретической физики – физики квантовых жидкостей».

Оказывается, воспользовавшись законами сохранения, можно понять природу сверхтекучести – способности жидкости протекать по тонким капиллярам без вязкости.