3. $\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$.

4. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$. *Решение.* Уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни тогда и только тогда, когда $(4a-2)^2 \le 1$, т.е.

$$\left|a-\frac{1}{2}\right| \le \frac{1}{4}, \text{ откуда } \frac{1}{4} \le a \le \frac{3}{4}.$$

Задача сводится к нахождению всех значений a, при которых функция $f(a) = \frac{1-4a}{27a^4}$ принимает целые значения на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$. Уравнение $f'(a) = \frac{1}{27}\left(-4a^{-5}+12a^{-4}\right) =$
$= \frac{4}{27}a^{-5}(3a-1) = 0$ имеет на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$ единственный корень $a = \frac{1}{3}$, причем $f'(a) < 0$ при $a < \frac{1}{3}$ и $f'(a) > 0$ при $a > \frac{1}{3}$. Следовательно, функция $f(a)$ убывает при $a \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right)$ и возрастает при $a \in \left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]$.

Так как $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ и $f\left(\frac{1}{3}\right) = -1$ – целые числа, $a - 1 <$
$< f\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{2^9}{3^7} < 0$, то искомое множество значений a состоит из чисел $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{3}$.

5. $\sqrt{30}/4$; $\pi\sqrt{30}/28$. *Решение.* Пусть E – точка пересечения BC и AD, M и N – середины отрезков CD и AB соответственно (рис.7). Тогда ABE – правильный треугольник, $NE =$
$= \frac{\sqrt{3}}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $MN = \frac{2}{3}NE = 2\sqrt{3}$, $ME = \sqrt{3}$, так как MN – диаметр вписанной в треугольник ABE окружности, радиус которой равен $\frac{1}{3}NE$.

Заметим, что перпендикулярными основанию пирамиды являются грани SBC и SAD, а линия их пересечения (прямая SE) – перпендикуляр к основанию и $SE = \sqrt{5}$.

Пусть MK – высота в треугольнике SMN, тогда MK – перпендикуляр к плоскости ABS ($KM \perp SN$ и $KM \perp AB$, так как AB – перпендикуляр к плоскости SNE). Прямая CD параллельна плоскости SAB и поэтому расстояние от точки D до плоскости SAB равно MK.

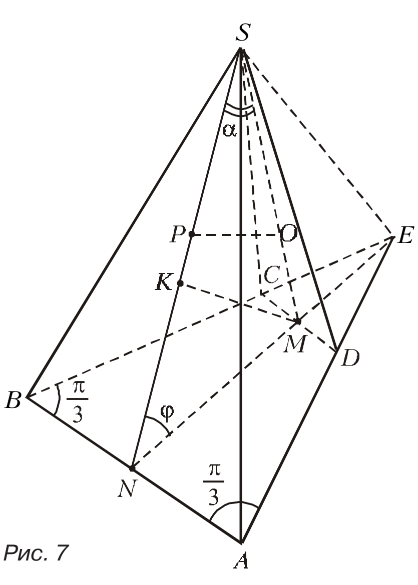

Рис. 7

Если $\angle SNM = \varphi$, то $KM = MN\sin\varphi$, где $\operatorname{tg}\varphi = \frac{SE}{NE} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}}$, откуда $\sin\varphi = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}}$,
$KM = 2\sqrt{3}\frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} =$
$= \frac{\sqrt{30}}{4}$.

Пусть O – центр окружности, вписанной в треугольник SCD, P – точка пересечения отрезка SN с перпендикуляром к стороне SM треугольника SMN, проведенном через точку O.

Радиус r этой окружности равен радиусу основания конуса, высота H конуса равна OP, а его объем $V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$.

Если σ – площадь треугольника SCD, p – его полупериметр, то $\sigma = \frac{1}{2}CD \cdot SM$, $p = SD + \frac{CD}{2}$, где $CD = \frac{1}{3}AB =$
$= 2$, $SM = \sqrt{SE^2+ME^2} = \sqrt{5+3} = 2\sqrt{2}$, $SD = \sqrt{SM^2+MD^2} =$
$= \sqrt{8+1} = 3$, $p = 4$, $\sigma = 2\sqrt{2}$ и поэтому $r = \frac{\sigma}{p} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $SO =$
$= SM - r = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Пусть $\angle NSM = \alpha$, тогда $H = SO\operatorname{tg}\alpha = \frac{3\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. Найдем $\cos\alpha$, применив теорему косинусов к треугольнику SMN.

Получим $MN^2 = SN^2 + SM^2 - 2SN \cdot SM\cos\alpha$, где $SN =$
$= \sqrt{SE^2+NE^2} = \sqrt{5+27} = 4\sqrt{2}$, $SM = 2\sqrt{2}$, откуда $\cos\alpha =$
$= \frac{7}{8}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{7}$, $H = \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{3\sqrt{30}}{14}$.

6. $a = -4$, $b = 5$, $c = -2$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 – абсциссы точек, в которых график функции $y = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, где $c < 0$, пересекает ось Ox. Тогда x_1 и x_2 – корни многочлена $f(x)$, а $f(x)$ делится на $(x-x_1)(x-x_2)$, откуда следует, что $f(x) =$
$= (x-x_1)(x-x_2)(x-\alpha)$, где α – одно из чисел x_1, x_2 (уравнение $f(x) = 0$ по условию имеет ровно два различных корня). Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет вид $f(x) =$
$= (x-x_1)^2(x-x_2)$, откуда находим $f'(x_1) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_1, 0)$ совпадает с осью Ox.

По условию ордината точки A равна c, где $c < 0$, а касательная к графику функции $y =$
$= f(x)$ в точке M проходит через точку A. Поэтому абсцисса точки M равна x_2, а абсцисса точки N равна x_1 (рис.8). Задача сводится к нахождению чисел x_1 и x_2.

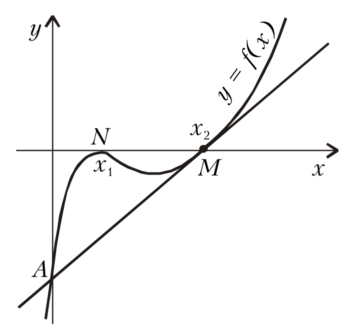

Рис. 8

Так как $f'(x_2) = (x_2-x_1)^2 =$
$= K$, то уравнение прямой, касающейся в точке M графика функции $y = f(x)$, имеет вид $y = k(x-x_2)$. Эта прямая проходит через точку $A(0, c)$, где $c = f(0) = -x_2x_1^2$. Поэтому $c = -kx_2$ и $x_2x_1^2 = x_2(x_2-x_1)^2$, откуда $x_2 = 2x_1$ $(x_2 \ne 0)$ и $c = -2x_1^3$.

Пусть S – площадь треугольника AMN, тогда $S =$
$= 1 = -c\frac{1}{2}(x_2-x_1) = -\frac{1}{2}cx_1$, откуда $c = -\frac{2}{x_1} = -2x_1^3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $f(x) = (x-1)^2(x-2) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. Пусть нижний брусок с массой M движется вниз вдоль наклонной плоскости с ускорением a. Введем систему координат: ось X направим вдоль наклонной плоскости, ось Y пер-