лишь в том случае, когда коэффициенты при одинаковых степенях и в левой и правой частях равны (мы пользуемся постоянно применяемым при работе с многочленами утверждением: если многочлен степени k обращается в нуль при $k+1$ различных значениях независимой переменной, то этот многочлен является нулевым).

В силу формулы бинома Ньютона

$$n^m-(n-1)^m = mn^{m-1}-\frac{m(m-1)}{2}n+\ldots+(-1)^{m-1},$$

поэтому для определения коэффициентов a_0, a_1, ..., a_k получаем линейную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_0=1, \\ -\frac{k}{2}a_0+a_1=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{(-1)^k}{k+1}a_0+\frac{(-1)^{k-1}}{k}a_1+\ldots+a_k=0. \end{cases}$$

В уравнении с номером m ($m=1$, 2, ..., $k+1$) содержатся неизвестные a_0, a_1, ..., a_{m-1}, причем коэффициент при a_{m-1} равен 1. Из первого (верхнего) уравнения системы находим $a_0=1$, из второго — $a_1=\frac{k}{2}$ и т.д. При переходе сверху вниз к очередному уравнению с номером m мы получаем соотношение, в котором a_0, a_1, ..., a_{m-2} уже найдены, а a_{m-1} определяется однозначно, так как коэффициент при a_{m-1} равен 1 (главное, что он не равен нулю). Следовательно, система имеет решение и притом единственное, что доказывает существование многочлена $P_k(x)$.

Пример 2. Найдите формулу для суммы $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Решение. Действуя по общей схеме, ищем многочлен

$$P_3(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3,$$

удовлетворяющий условию

$$\int_{n-1}^{n}P_k(x)dx=n \text{ при } n=1,\ 2,\ \ldots$$

Имеем:

$$\frac{a_0}{4}\left(4n^3-6n+4n-1\right)+\frac{a_1}{3}\left(3n^2-3n+1\right)+\frac{a_2}{2}(2n-1)+a_3=n^3,$$

откуда получаем систему

$$\begin{cases} a_0=1, \\ -\frac{3}{2}a_0+a_1=0, \\ a_0-a_1+a_2=0, \\ -\frac{1}{4}a_0+\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{2}a_2+a_3=0. \end{cases}$$

Отсюда последовательно находим: $a_0=1$, $a_1=\frac{3}{2}$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=0$. Следовательно,

$$P_3(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x,$$

а

$$S_3(n)=\int_0^n P_3(x)dx=\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Упражнение 2. Найдите формулу для суммы $1^4+2^4+\ldots+n^4$.

Упражнение 3. Докажите, что при любом натуральном k свободный член многочлена $S_k(n)$ равен нулю.

Упражнение 4. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1}.$$

Идея замены сумм площадей прямоугольников интегралом от некоторой непрерывной функции применяется и при решении следующей задачи.

Пример 3. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}\cos k$.

Решение. Подберем такую непрерывную функцию $f(x)$, что равенство

$$\int_{n-1}^{n}f(x)dx=\cos n$$

выполняется при всех натуральных n. Учитывая вид правой части последнего равенства, естественно искать $f(x)$ в виде гармоники

$$f(x)=A\cos(x+\alpha).$$

Равенство

$$0=\int_{n-1}^{n}A\cos(x+\alpha)dx-\cos n = A\sin(n+\alpha)-A\sin(n+\alpha-1)-\cos n = A\sin n\cos\alpha+A\cos n\sin\alpha - A\sin n\cos(\alpha-1) - A\cos n\sin(\alpha-1)-\cos n$$

будет справедливым при всех n, если коэффициенты при $\cos n$ и $\sin n$ равны нулю. Это условие дает систему уравнений

$$\begin{cases} A\sin\alpha-A\sin(\alpha-1)-1=0, \\ A\cos\alpha-A\cos(\alpha-1)=0. \end{cases}$$

Так как $A\neq 0$, то из второго уравнения находим: $\alpha=\frac{1}{2}+\pi m$, $m\in\boldsymbol{Z}$. Нас устраивает любое решение системы, поэтому возьмем $\alpha=\frac{1}{2}$, тогда из первого уравнения получим, что $A=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}$. Следовательно, нам подходит функция

$$f(x)=\frac{\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k=\int_0^n\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)dx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)-\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}}.$$

Ответ. $\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}$.

Отметим, что разобранная задача имеет и другие решения, но в этом разделе все задачи мы решаем только одним способом.

Упражнение 5. Найдите сумму $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos k$.

Литература

1. *Д.О.Шклярский, Н.Н.Ченцов, И.М.Яглом.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Физматлит, 1965.

2. *В.А.Кречмар.* Задачник по алгебре. – М.: Физматлит, 1964.