М1644. *Двое показывают следующий фокус. Один из перетасованной колоды, содержащей 52 карты, вытаскивает 5 произвольных карт и выкладывает четыре из них в ряд картинкой вверх, а пятую*
а) также выкладывает в ряд среди остальных четырех, но картинкой вниз;
б) берет себе.*
Второй, глядя на лежащие перед ним карты, называет пятую карту. Как он это делает?

а) Первый фокусник может выбрать из пяти карт две карты одной масти. Одну из них он положит картинкой вниз (на какое именно место в ряду карт, будет уточнено позднее), а вторую он положит с левого края картинкой вверх. По левой карте второй фокусник узнает масть закрытой карты. Всего карт одной масти 13, одна из них открыта, так что остается выбрать одну из 12 оставшихся. Следующие три карты, которые открыты, можно упорядочить шестью способами (поскольку любые три предмета можно упорядочить всего тремя способами). После того, как 4 открытые карты выложены, закрытую карту можно расположить (между ними или с краю) пятью способами. Всего вариантов оказывается $6 \times 5 = 30$ – этого достаточно, чтобы закодировать 12 карт.
б) Если действовать по той же схеме, то информации не хватает, так как для выделения одной карты из 12 имеется лишь 6 вариантов расположения трех открытых карт. Но не нужно торопиться с выводом, что у задачи отрицательный ответ. Как и в задаче а), первый фокусник выбирает масть, которая представлена хотя бы двумя картами, выбирает эти две карты. Дальше он действует иначе. 13 карт выбранной масти можно расположить по кругу в установленном порядке (например, в порядке роста старшинства). На круге установим направление. От каждой карты проведем стрелки к шести картам, которые в этом круге идут следом за ней. Тогда любые две карты окажутся соединенными, и притом только одной стрелкой. Фокусник по-прежнему выбирает две карты одной масти, но картинкой вверх кладет ту из них, из которой идет стрелка к второй карте. Таким образом, второму фокуснику придется выбирать уже не из 12, а только из 6 карт, что, как мы видели, возможно.

Г.Гальперин

М1645. *Докажите, что число способов, которыми можно расставить n чисел 1, 2, ..., n ($n \geq 10$) в последовательность без убывающих подпоследовательностей длиной 10, не превосходит 81^n.*

Будем называть расстановку чисел хорошей, если она удовлетворяет условиям задачи. Сначала докажем, что если расстановка хорошая, то числа в ряду можно раскрасить в девять цветов так, чтобы числа каждого цвета шли в порядке возрастания. Действительно, будем красить числа слева направо, используя каждый раз цвет с наименьшим номером такой, что последнее покрашенное в этот цвет число меньше текущего. Предположим, что девяти цветов не хватило. Мы не можем покрасить очередное число в девятый цвет, так как в девятый цвет уже было покрашено большее число. Оно не было покрашено в восьмой цвет, поскольку до него встретилось большее число, покрашенное в восьмой цвет... и так далее. Получаются 10 чисел, которые идут в порядке убывания, чего не может быть.

Расстановка чисел от 1 до n вместе с раскраской в девять цветов такой, что последовательность чисел каждого цвета возрастает, полностью определяется цветом каждого числа от 1 до n и цветом каждого места в ряду. Числа от 1 до n можно раскрасить в девять цветов 9^n способами. И столькими же способами можно раскрасить в девять цветов n мест, на которые эти числа будут расставлены. Таким образом, число хороших расстановок не превосходит 81^n.
Замечание. Метод раскраски, который мы применили, позволяет доказать, что при любой расстановке в ряд первых $mn + 1$ натуральных чисел найдется монотонно возрастающая подпоследовательность из $n + 1$ чисел или убывающая подпоследовательность из $m + 1$ чисел.

А.Канель

Ф1653. *С балкона бросают камешки через равные интервалы времени и без начальной скорости. К моменту, когда первый камешек упал на землю, следующий пролетел ровно половину пути. Какую часть пути пролетел к этому моменту третий камешек? Сколько камешков было в полете непосредственно перед ударом первого камешка о землю? Сопротивлением воздуха пренебречь. Считать ускорение свободного падения равным точно 10 м/с^2.*

Обозначим высоту балкона через H. Тогда время полета первого камешка будет $T = \sqrt{2H/g}$. Второй камешек летел в течение времени $T - \tau = \sqrt{H/g}$, откуда найдем интервал между бросаниями:

$$\tau = T\left(1 - 1/\sqrt{2}\right) \approx 0{,}293\ T.$$

Это немного меньше трети времени падения T; отсюда сразу следует, что к моменту падения первого камешка на землю в воздухе, кроме него, будет еще три камня (четыре – включая первый).
Третий камешек к моменту падения первого находился в воздухе в течение времени $T - 2\tau$, за это время он пролетел расстояние

$$h = H\left(T - 2\tau\right)^2 / T^2 \approx 0{,}17\ T.$$

З.Рафаилов

Ф1654. *Предлагается следующий проект движущегося тротуара: человек ступает с земли на первую движущуюся дорожку, через некоторое время переходит на следующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.*

При разгоне человека, ступившего на первую дорожку с земли, его импульс меняется от нуля до величины Mv_1,