перебора (и к тому же весьма объемного) не обойтись.

А теперь вернемся к исходной задаче. Почему все-таки автор сначала делил исходное слово на пятибуквенные части, а не на части другой длины? Как уже отмечалось, глобальная цель состояла в том, чтобы произвести наибольшее впечатление, а для этого следовало свести к минимуму итоговое число палиндромов. Если исходное слово состоит из M букв, то разбив его сначала на n-буквенные части, получим M/n частей (полагаем, что M делится на n). Далее, каждую из этих частей можно разделить не более чем на $f(n)$ палиндромов, в результате чего окончательное число палиндромов становится равным $M \cdot f(n)/n$. Следовательно, надо стремиться к тому, чтобы выбрать такое n, для которого отношение $f(n)/n$ наименьшее, или (что то же самое) отношение $n/f(n)$ наибольшее.

Среди тех n, для которых $f(n)$ нам известно, наилучшим является именно 5, потому что $5/f(5) = 5/2 = 2{,}5$ – это больше, чем для любого другого n, не превышающего 7. Ближайшее к нему значение (несколько худшее) равно $7/f(7) = 7/3 = 2{,}33\ldots$

Итак, при создании задачи автор окончательно остановился на $n = 5$, и лишь затем подобрал подходящее $M = 1995$ – длину исходного слова, кратную n, увязав ее заодно с номером текущего года. Такова история данной задачи.

После выпуска задачи в свет автор долгое время пребывал в блаженной уверенности, что из всех натуральных n именно при $n = 5$ достигается наибольшее значение отношения $n/f(n)$. Эта уверенность значительно окрепла после того, как выяснилось, что $f(8) = 4$, и потому $8/f(8) = 2$ – явное ухудшение результата даже по сравнению с $n = 7$. И потому автор был несказанно потрясен, когда все тот же И.Воронович, незадолго до того ознакомленный с задачей, доказал, что $f(13) = 5$. Разумеется, он при этом применил не прямой перебор (для которого пришлось бы просмотреть более 4 тысяч тринадцатибуквенных слов – сизифов труд!), а лишь частичный, компенсируя недостаток количества высоким уровнем и тонкостью логических рассуждений. Так как $13/f(13) = 13/5 = 2{,}6$, то рекордное прежде отношение, достигавшееся при $n = 5$, оказалось превзойденным! Более того, И.Воронович попытался пощупать и 27-буквенные слова, рассматривая их как пару 13-буквенных с одной буквой между ними и высказал (хотя и не сумел доказать) предположение, что $f(27) = 10$. Если это действительно так, то имеет место новый рекорд: $27/10 = 2{,}7$.

Обсуждение задачи вследствие таких открытий приобрело новый импульс. Проанализировав последовательность рекордов, кто-то выдвинул предположение, что с ростом n отношение $n/f(n)$ стремится к некоторому пределу, и еще кто-то, видимо, совсем ошалев, высказал мысль, что этот предел вполне может равняться e – знаменитому основанию натуральных логарифмов, равному $2{,}71828\ldots$ Это полумистическое заявление чуть не повергло всех в шоковое состояние и стимулировало дальнейшие исследования. Ну, а поскольку логические рассуждения ничего не давали, пришлось мобилизовать тяжелую артиллерию, то бишь компьютер, чтобы разобраться, как обстоят дела.

Здесь мы вынуждены мажорные интонации нашего изложения заменить минорными: *компьютер мало чем помог.* Если в предыдущих задачах он был вполне способен работать с последовательностями, содержащими сотни тысяч элементов, то здесь все обстояло гораздо хуже. Поскольку при увеличении длины слова на одну букву количество различных слов возрастает сразу вдвое, то даже возможности «Пентиума» довольно быстро исчерпались. Вспомните знаменитые зерна на шахматной доске! Фактически компьютер оказался ими засыпан, и удалось добраться лишь до 19-буквенных слов. Вот значения $f(n)$ для все n от 9 до 19:

$$f(9) = f(10) = 4,$$

$$f(11) = f(12) = f(13) = 5$$

(Воронович был прав!),

$$f(14) = f(15) = f(16) = f(17) = 6,$$

$$f(18) = f(19) = 7.$$

Негусто, но все-таки лучше, чем ничего. Во всяком случае, имеем новый рекорд: $17/f(17) = 2{,}83\ldots$ Как видим, последовательность отношений $n/f(n)$ перешагнула через число e и, похоже, не намерена останавливаться на достигнутом. Так что сомнительно, что пределом является число e. Тогда, может быть, π? Трудно сказать. Конечно, вполне возможно, что предела нет вовсе, и отношения $n/f(n)$ возрастает неограниченно (хотя и неправильно, с рывками и колебаниями). Правда, рассуждая чисто эвристически, трудно в это поверить. Ведь $n/f(n)$ – это, по сути, средняя длина палиндрома, на которые разбито самое «трудноразбиваемое» n-буквенное слово. Может ли эта средняя длина неограниченно возрастать? Вряд ли. Хотя...

Да, здесь особыми успехами хвастаться не приходится. Более того, не доказано даже неравенство $f(n+1) \geq f(n)$, хотя оно-то вообще выглядит почти очевидным.

В общем, начали во здравие, а кончили за упокой. Печально, но что делать? Одна надежда – на читателей. Возможно, кто-то сумеет составить такую программу, которая вычислит значения $f(n)$ для нескольких сотен первых n, анализируя которые, удастся правильно спрогнозировать ее поведение и найти предел (если он существует, конечно). А может, есть и чисто теоретический путь?

P.S. В течение некоторого времени автору казалось, что рассмотренная задача является частью более общей и наверняка более сложной задачи, а именно: что будет, если в алфавите не 2 буквы, а m букв, где m – заданное натуральное число? Таким образом, от частной задачи изучения функции от одной переменной $f(n)$ мы переходим к более общей задаче изучения функции $f(m,n)$.

Оказалось, однако, что эти сложности – фиктивные: для всех m, кроме $m = 2$, задача решается чрезвычайно просто.

Если $m = 1$, то все слова состоят из одинаковых букв, поэтому являются палиндромами. Поэтому $f(1,\ n) = 1$ для любого n.

Если же $m > 2$, то можно показать, что $f(m,n) = n$. Для этого возьмем лишь три различных буквы (А, Б и В) и составим из них вот такую бесконечную в обе стороны последовательность:

...АБВАБВАБВАБВАБВАБ

ВАБВАБВАБВ...

Вырезанное из нее слово любой длины, как нетрудно заметить, можно разбить на палиндромы, только «рассыпав» на отдельные буквы.