не получилось просто $a_n = n^2$, т.е. $k = 1$? Несомненно, причина кроется в многократно повторяемых словах «*примерно*». В самом деле, вычеркивая из некоторого количества чисел, скажем, каждое пятое, мы уменьшим их количество ровно на $1/5$ только если оно делится на 5, в противном же случае – меньше, чем на $1/5$. То же верно и при других вычеркиваниях, так что в итоге доля оставшихся чисел окажется несколько больше $1/n$, что повлечет за собой некоторое уменьшение k.

Попытаемся «обналичить» эту идею. Возьмем, как и прежде, a_n первых натуральных чисел. Пусть мы уже вычеркнули каждое второе, третье, ..., $(i-1)$-е из них и сейчас собираемся вычеркнуть каждое i-е. Если количество чисел, еще оставшихся перед этой операцией, равно N, то N может давать при делении на i любой из i остатков – от 0 до $(i-1)$ включительно. Для каждого из них количество вычеркнутых чисел, очевидно, равно N/i, $(N-1)/i$, $(N-2)/i$, ..., $(N-(i-1))/i$. Естественно считать все возможные остатки *равновероятными*, вследствие чего *среднее количество* вычеркнутых чисел должно быть близко к среднему арифметическому перечисленных значений, которое, в свою очередь, равно

$$\frac{\frac{N}{i}+\frac{N-1}{i}+\frac{N-2}{i}+\ldots+\frac{N-(i-1)}{i}}{i}= \frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i},$$

а количество оставшихся чисел составляет

$$N-\left(\frac{N}{i}-\frac{i-1}{2i}\right)=\frac{i-1}{i}N+\frac{i-1}{2i}.$$

Теперь поглядим, во что это выльется, меняя i от 2 до n. Поначалу $N = a_n$, поэтому после вычеркивания каждого второго числа количество оставшихся чисел составит

$$\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}.$$

После вычеркивания каждого третьего числа это количество равно

$$\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2\cdot 2}\right)+\frac{2}{2\cdot 3}= \frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3},$$

а после вычеркивания каждого четвертого –

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3}\right)+\frac{3}{2\cdot 4}= \frac{1}{4}a_n+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{2\cdot 4}.$$

Дальше, видимо, продолжать не надо – и так все ясно. Закономерность вполне прозрачна, и не составляет труда доказать ее, например, по индукции. Окончательный же результат таков: после вычеркивания каждого n-го числа их всего останется

$$\frac{1}{n}a_n+\frac{1}{2\cdot n}+\frac{2}{2\cdot n}+\ldots+\frac{n-1}{2\cdot n}= \frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}.$$

Вспомним, что это окончательное значение должно равняться n, и потому

$$\frac{a_n}{n}+\frac{n-1}{4}=n,$$

откуда $a_n = (3n^2+n)/4$, и $k = \lim\limits_{n\to\infty} a_n/n^2 = 3/4$. Теперь промах в другую сторону – чуть-чуть недотянули до $\pi/4$. Досадно!

Но где же источник этого промаха? Должно быть, в казавшемся нам естественным предположении о равновероятности остатков. «Все не так, ребята!» – сказал бы по этому поводу В.С.Высоцкий. *А как?*

Похоже, на выбранном пути перспектива отсутствует, поэтому возьмемся за дело в буквальном смысле *с другого конца*. А именно: возьмем n чисел и будем *добавлять* к ним (или, точнее сказать, *вставлять*) сначала каждое n-е, затем – каждое $(n-1)$-е и так далее вплоть до каждого второго.

Отметим теперь следующий факт. Вставляя каждое n-е число, мы наверняка увеличим количество чисел *ровно на* 1. Более того, вставляя затем каждое $(n-1)$-е число, каждое $(n-2)$-е число и так далее некоторое количество раз (зависящее, понятно, от n), мы будем тем самым также добавлять *ровно по одному* числу, пока количество чисел не возрастет настолько, что при очередной вставке окажутся вставленными уже два числа. Затем несколько раз будет вставлено по два числа, пока на очередном шаге не перейдем к трем и так далее.

Упорства нам не занимать – в очередной раз приступим к реализации новой идеи. Пусть мы последовательно совершаем описанные «вставные» операции, добавляя при этом по одному числу. Затем, когда мы начали вставлять каждое x_1-е число, добавилось уже два числа, поскольку значение x_1 в достаточной степени уменьшилось, а общее количество чисел в достаточной степени возросло. Итак, мы продолжаем «вставки», добавляя по два числа, но начиная вставлять каждое x_2-е число, добавляем уже по три числа и так далее.

Если бы удалось найти явную зависимость x_m от m, это было бы большим успехом. Что ж, попытка – не пытка, попробуем. До того, как мы станем вставлять каждое x_m-е число, общее «накопленное» количество чисел, очевидно, стало равно

$$y_m = n+(n-x_1)+2(x_1-x_2)+ +3(x_2-x_3)+\ldots+m(x_{m-1}-x_m)= =2n+(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1})-mx_m.$$

То, что при вставке очередного, каждого x_m-го числа, будут добавлены уже не m, а $m+1$ чисел, определяется условием $y_m=(m+1)x_m$ (ведь это как раз и означает, что y_m в достаточной степени возросло, а x_m в остаточной степени уменьшилось). Тогда

$$(m+1)x_m = =2n+(x_1+x_2+\ldots+x_{m-1})-mx_m$$

и

$$x_m=\frac{2n+x_1+x_2+\ldots+x_{m-1}}{2m+1}.$$

Это уже кое-что: получено рекуррентное выражение. А можно ли из него получить явную зависимость x_m от m? Оказывается, да! Не утомляя читателя описанием творческих процессов и сопровождающими их муками и ошибками, приведем сразу результат, который оказался, согласитесь, очень симпатичным и даже слегка красивым:

$$x_m=n\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2m}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2m+1)}.$$

Теперь поразмыслим, до каких пор (т.е., точнее говоря, до какого m) будет продолжаться процесс «вставки». Но здесь и размышлять нечего – до тех пор, пока не станет $x_m = 1$ (поскольку дальнейшее добавление означало бы вставку *каждого первого* числа – абсолютный нонсенс!). Но это означает, что наибольшее m свя-