и $p(n)$ устремятся к $p$. Кроме того, выражение $\Delta_a - \Delta_b - k$ ограничено сверху и снизу некоторыми фиксированными числами, поэтому предел отношения $\left(\Delta_a - \Delta_b - k\right)/N$ устремится к нулю. Следовательно, предельный вид главного уравнения таков:

$$\frac{1}{p+1}\cdot\left(\frac{p+1}{p}+k\right)=1+0.$$

После раскрытия скобок и избавления от знаменателей получается уравнение

$$p^2 - pk - 1 = 0,$$

из которого

$$p=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}$$

в полном соответствии с предположением. Гора с плеч!

Конечно, наши рассуждения грешат кое-какими недочетами. В частности, прежде чем переходить к пределу в главном уравнении, следовало бы доказать само существование предела. Но в целом результат следует признать удовлетворительным. И получили мы его, в основном, благодаря компьютеру, ибо не зная броду, куда бы мы сунулись? А подгонять решение под известный ответ – милое дело (в чем с нами согласится любой троечник). Хвала «Пентиуму»!

Вторая задача также связана с последовательностями. Читатель, видимо, неоднократно сталкивался с задачами типа: «Возьмем последовательность натуральных чисел и $n$ раз вычеркнем из нее все числа, стоящие на четных местах. Что получится?» На этот вопрос ответить несложно, как и на подобные вопросы об аналогичных последовательностях (в которых, скажем, вычеркиваются числа, стоящие на нечетных местах, либо попеременно на четных и нечетных и т.п.). Как-то, развлекаясь с подобными экспонатами, автор неожиданно наткнулся на изрядных размеров подводный камень, который сам же, в общем-то, и породил. А именно: возьмем все ту же последовательность натуральных чисел и вычеркнем из нее все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 2 (т.е., другими словами, все четные числа). В получившейся последовательности вычеркнем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 3. Затем вычеркиваем все числа, стоящие на местах, номера которых делятся на 4. Ну, и так далее *до бесконечности.* Что за последовательность $\{a_n\}$ получится?

Во-первых, обратим внимание, что какая-то бесконечная последовательность, действительно, получится. В самом деле, после того, как вычеркнуты все числа, номера которых делятся на $n$, первые $n$ членов образовавшейся последовательности дальнейшим изменениям не подвергнутся, ибо после этого будут вычеркиваться какие-то числа, порядковые номера которых строго больше $n$. Таким образом, чтобы получить, например, первую сотню членов нашей последовательности $\{a_n\}$, придется проделать указанную операцию 99 раз (вычеркивая последовательно каждое второе, третье, ..., сотое число). Вручную проделать нечто подобное даже для не очень больших $n$ – дело немыслимое.

Но позвольте, а «Пентиум» на что? Запряжем-ка его покрепче! Вот и результат: образуется странная последовательность, начинающаяся числами: 1, 3, 7, 13, 19, 27, 39, 49, 63, 79, 91, 109, 133, 147, ... Ничего вразумительного о ней сказать нельзя, кроме того, что она возрастает. К нашей радости, компьютер с хорошим программным обеспечением способен помимо вычислений также и строить графики, чем мы не преминем воспользоваться. На рисунке 1 показан график зависимости $a_n$ от $n$. Хотя зависимость, как видно, явно неравномерная, но *в целом* возрастание $a_n$ весьма регулярное, причем наверняка не линейное, а более быстрое. Какое же?

Здесь пришлось к пяти умам компьютера подключить человеческий и заняться эвристикой, т.е. нестрогими рассуждениями *общего характера*. Допустим, мы взяли не бесконечную последовательность, а лишь $a_n$ первых натуральных чисел и вычеркнули из них каждое второе. Останется *примерно* половина, т.е. $1/2$. Из них вычеркиваем каждое третье. Останется *примерно* $2/3$ остатка. Вычеркнув затем каждое четвертое, оставим *примерно* $3/4$ предыдущего остатка и так далее. Проделав такую операцию $n$ раз, мы дальше, как уже отмечалось, вычеркнуть ничего не сможем, потому что останется как раз $n$ чисел: $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$. С другой стороны, доля оставшихся чисел (их количество по отношению к количеству исходных) близка к $(1/2)\cdot(2/3)\cdot(3/4)\cdot\ldots\cdot\left((n-1)/n\right)=1/n$. Но если $n$ чисел составляют $1/n$ их исходного количества, то первоначально чисел было $n^2$. Итак, есть основания робко предположить, что $a_n$ должно быть близко к $n^2$. Как бы это проверить? Безусловно, с помощью того же компьютера: если он построил график зависимости $a_n$ от $n$, то кто ему мешает построить график зависимости $\sqrt{a_n}$ от $n$? Что из этого получилось, читатель может лицезреть на рисунке 2. Впечатляет? Еще бы! Теперь можно уже не робко, а вполне уверенно предполагать, что $a_n$ с ростом $n$ *асимптотически* приближается к $kn^2$.

Что ж, дело за малым – найти $k$. Сначала, конечно, вычислим его с возможно большей точностью. Запускаем программу... Готово! Получаем $k = 0{,}785398\ldots$ Господи, что же это? Проницательный читатель уже догадался, а остальные пусть умножат на 4. О ужас – получается $\pi$! Это почище золотого сечения! Такой результат способен свалить с ног даже нормального человека, не говоря о любителе математики.

Отдышавшись после нокдауна, пытаемся собрать мысли в кучу. Итак, $k = \pi/4$. Никуда не денешься – придется, как и в предыдущей задаче, объяснить это значение задним числом. Но как? Вспомним наши рассуждения, позволившие предположить, что $a_n$ близко к $n^2$. Почему

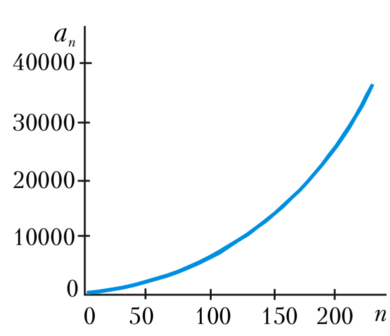


*Рис. 1*

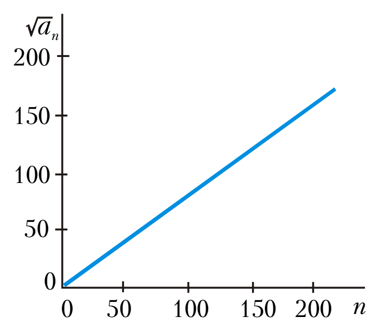


*Рис. 2*