почему попытка И.Вороновича нащупать периодичность была обречена на провал – ведь чередуйся А-числа с В-числами по периодическому закону, предел был бы рациональным числом. Но кроме этого, ничего путного в голову не лезло, зато только что использованная компьютерная программа маячила, так сказать, перед самым носом. От безысходности было решено слегка ее модернизировать, чтобы проверить, как поведут себя последовательности a_n и b_n, если связать их более общим соотношением: $a_n = b_n + kn$, где k – некоторое натуральное число (в исходном варианте было, очевидно, $k = 1$).

Сначала соотношение между количеством В- и А-чисел было найдено для $k = 2$. Оно оказалось равным 2,1414213... Дробная часть этого числа поразительно напоминает десятичное разложение $\sqrt{2}$. Правда, целая на 1 больше, чем надо. Но тогда выходит, что предел отношения для $k = 2$ равен $1 + \sqrt{2}$. Результат налицо – хотя совершенно непонятный.

Дальше все пошло гораздо хуже. Возникающие отношения были совсем ни на что не похожи: $k = 3$ получилось 3,302775..., для $k = 4$ – 4,236067..., для $k = 5$ – 5,192582... и так далее. Тупик!

И здесь автору невероятно, просто фантастически повезло. По счастливому стечению обстоятельств он незадолго до этого готовил к печати статью о цепных дробях и в процессе подготовки исключительно для собственного удовольствия вычислил значения простейших цепных дробей, которые чудом удержались в памяти. В частности, еще не забылось, что

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

а также:

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} = 1 + \sqrt{2}.$$

Естественным образом родилась совершенно бредовая идея (вполне под стать самим последовательностям): если $a_n = b_n + kn$, то предел отношения количества В-чисел к количеству А-чисел равен следующей цепной дроби:

$$k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \cfrac{1}{k + \ldots}}}}.$$

Для удобства следует привести ее к более компактному виду. Это нетрудно. Пусть данное выражение равно z. Тогда под самой верхней дробной четой расположено то же самое число z, что дает нам уравнение:

$$k + \frac{1}{z} = z,$$

откуда $z = \left(k + \sqrt{k^2 + 4}\right)/2$. Для $k = 1$ и 2 получаем уже знакомые нам золотое сечение и $1 + \sqrt{2}$. А для других k? Если $k = 3$, то $x = \left(3 + \sqrt{13}\right)/2 = 3{,}302775\ldots$ – полное совпадение с компьютерным результатом! То же самое имеет место и для $k = 4$, и для $k = 5$, и (здесь «Пентиум» разошелся не на шутку) для следующих двух десятков значений k. Все сомнения отпали напрочь. Можно было давать руку (или хотя бы палец) на отсечение, что предел равен именно $z = \left(k + \sqrt{k^2 + 4}\right)/2$, но *как это доказать?*

Здесь решение задачи перешло в стадию, условно именуемую «глаза боятся, а руки делают». Совершенно не веря в успех, автор уныло приступил к рассуждениям. Итак, пусть $a_n = b_n + kn$, где k – заданное натуральное число. Обозначим через $p(N)$ отношение количества В-чисел, не превосходящих N, к количеству А-чисел, не превосходящих N. Обозначим также через p предел значения $p(N)$ при $N \to \infty$ и найдем это p.

Сначала были сделаны предварительные оценки разности между соседними А- и В-числами (докажите их):

$$k + 1 \le a_{n+1} - a_n \le k + 2,$$

$$1 \le b_{n+1} - b_n \le 2.$$

Теперь возьмем первые N чисел натурального ряда. Пусть среди них имеется n А-чисел и соответственно $(N - n)$ В-чисел. По определению $p(N) = (N - n)/n$, откуда $n = N/(p(N) + 1)$.

Затем рассмотрим натуральные числа, не превосходящие b_n. Среди них, очевидно, ровно n В-чисел, а количество А-чисел, разумеется, в $p(n)$ раз меньше, т.е. $n/p(n)$. Всего же натуральных чисел, не превосходящих b_n, будет $n + n/p(n) = n \cdot \left(p(n) + 1\right)/p(n)$. Поскольку b_n – наибольшее из них, то $b_n = n \cdot \left(p(n) + 1\right)/p(n)$.

Тогда следующее В-число b_{n+1} в силу предварительных оценок либо на 1, либо на 2 превышает b_n, т.е. $b_{n+1} = b_n + \Delta_b$, где $1 \le \Delta_b \le 2$. Поэтому

$$a_{n+1} = b_{n+1} + k(n + 1) = b_n + \Delta_b + k(n + 1) = \frac{n \cdot \left(p(n) + 1\right)}{p(n)} + \Delta_b + kn + k.$$

Среди первых N натуральных чисел имеется n А-чисел. Это означает, что $a_n \le N$, но $a_{n+1} > N$, т.е. $a_{n+1} = N + \Delta_a$, где $\Delta_a \ge 1$. Оценим Δ_a сверху:

$$\Delta_a = a_{n+1} - N \le a_{n+1} - a_n \le k + 2$$

(в силу предварительных оценок). Итак, $1 \le \Delta_a \le k + 2$.

А теперь приравняем правые части двух полученных различных выражений для a_{n+1}:

$$\frac{n \cdot \left(p(n) + 1\right)}{p(n)} + \Delta_b + kn + k = N + \Delta_a.$$

Вспомним, что $n = N/\left(p(N) + 1\right)$ и подставим это значение в последнее выражение:

$$\frac{N}{p(N) + 1} \cdot \frac{p(n) + 1}{p(n)} + \Delta_b + k \cdot \frac{N}{p(N) + 1} + k = N + \Delta_a.$$

Отсюда после простых преобразований получаем *главное уравнение*:

$$\frac{1}{p(N) + 1} \cdot \left(\frac{p(n) + 1}{p(n)} + k\right) = 1 + \frac{\Delta_a - \Delta_b - k}{N}.$$

Так как ограничения сверху и снизу для Δ_a и Δ_b уже известны, то легко получить и ограничения для выражения $\Delta_a - \Delta_b - k$:

$$-1 - k \le \Delta_a - \Delta_b - k \le 1$$

(подробности опущены, так как слишком просты).

Наконец, устремим N к бесконечности и рассмотрим, что произойдет с главным уравнением. Очевидно, если $N \to \infty$, то и $n \to \infty$, поэтому и $p(N)$,