Решения задач М1631 — М1635, Ф1643—Ф1652

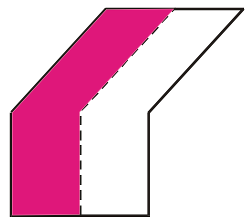
М1631. *Верны ли утверждения:*

а) если многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника отрезком;

б) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два равных многоугольника, то его можно разбить на два равных многоугольника отрезком;

в) если выпуклый многоугольник можно разбить ломаной на два многоугольника, один из которых можно перевести в другой движением, сохраняющим ориентацию (т.е. поворотом или параллельным переносом), то исходный многоугольник можно разбить отрезком на два равных многоугольника, один из которых переводится в другой тем же самым движением?

а) Параллельный перенос переводит левую половину фигуры рисунка 1 в правую, но отрезком, как легко проверить, эту фигуру на две равные части разрезать нельзя. Есть и другие примеры (рис.2–4).



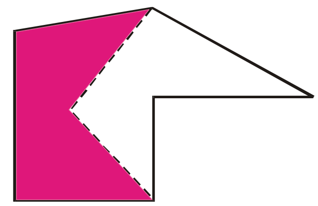


Рис.2

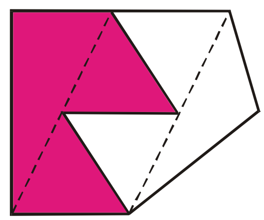


Рис.3

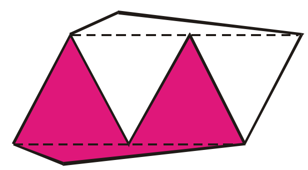


Рис.4

Поскольку многоугольники рисунков 3 и 4 выпуклые, ответ на вопрос пункта б) тоже отрицательный. (Рисунок 3 является частным случаем рисунка 4, в котором к четырем правильным треугольникам добавляются прямоугольные треугольники с углами 30° и 60°.)

Доказательство невозможности разрезания отрезком шестиугольника рисунка 4 на два равных многоугольника не сложно, но требует тщательного разбора нескольких случаев (при этом полезно наложить на длины сторон и величины углов некоторые дополнительные условия). Гораздо проще доказать то же самое для пятиугольника рисунка 3. Дело в том, что если многоугольник с нечетным числом вершин разрезан отрезком на два равных многоугольника, то одним из концов отрезка должна быть вершина многоугольника. Дальнейшее очевидно.

в) Пусть выпуклый многоугольник разбит ломаной $A_1A_2\ldots A_n$ на два равных многоугольника, один из которых переводится в другой поворотом или параллельным переносом. Рассмотрим два соседних звена ломаной: $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1}. Докажем, что ломаную можно «выпрямить».

Если точка A_i лежит на отрезке $A_{i-1}A_{i+1}$, то ее можно «выбросить», заменив звенья $A_{i-1}A_i$ и A_iA_{i+1} на $A_{i-1}A_{i+1}$. Если же A_i не принадлежит отрезку $A_{i-1}A_{i+1}$, то тот из двух углов, образованных лучами A_iA_{i-1} и A_iA_{i+1}, величина которого больше 180°, при движении переходит в равный ему угол $A_{j+1}A_jA_{j-1}$. В случае $|i-j|>1$ (рис.5) звенья $A_{i-1}A_i$, A_iA_{i+1} и $A_{j-1}A_j$, A_jA_{j+1} можно заменить на $A_{i-1}A_{i+1}$ и $A_{j-1}A_{j+1}$.

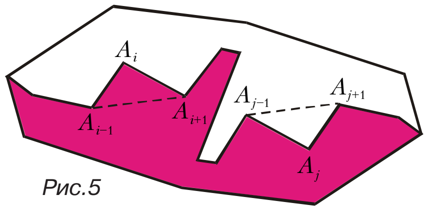


Рис.5

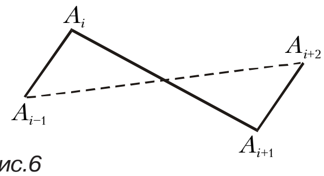


Рис.6

В случае $j = i + 1$ (рис.6) заменяем ломаную $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ на $A_{i-1}A_{i+2}$. Случай $j = i - 1$ рассматривается аналогично.

С.Маркелов

М1632.[1] *Некоторые грани кубика белые, а некоторые черные. Площадь его грани равна площади клетки шахматной доски. Кубик поставили на одну из клеток и прокатили по доске так, что он побывал на каждой клетке ровно по одному разу.*
Могло ли случиться, что все время цвета клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали?

Нет, не могло. Допустим, что существуют такая раскраска кубика и такой способ перекатывания, о которых идет речь в условии. Соединим синим цветом центры клеток доски в соответствии с тем, как перекатывался кубик. Получим ломаную длиной 63 единичных отрезка (рис. 1).

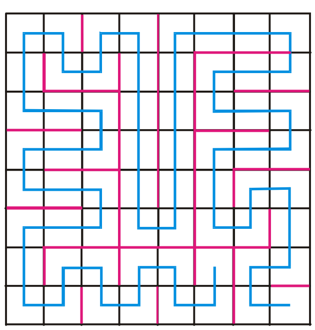


Рис.1

Рассмотрим все общие стороны соседних клеток шахматной доски (112 отрезков). Те из них, через которые кубик не перекатывался, закрасим красным цветом. Задумаемся о свойствах образовавшейся фигуры из красных отрезков.

Поскольку кубик побывал на всех клетках доски, красная фигура не разделяет доску на части. Значит, она не содержит циклов, т.е. является объединением нескольких деревьев.

Рассмотрим одно из этих деревьев. Всякое дерево, как известно, имеет хотя бы два листа (лист – это вершина, из которой выходит только один отрезок). Если бы два листа рассматриваемого дерева принадлежали границе доски, то красные отрезки делили бы доску на части. Значит, существует лист A, не лежащий на границе доски. Кубик обязан перекатиться через все три некрасных отрезка, которые выходят из точки A. Это значит, что кубик должен «обойти» точку A,

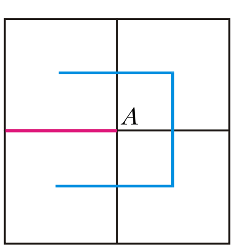


Рис.2

[1] *Автор задачи – А.Шаповалов.*

как показано на рисунке 2. При этом обходе с клетками, граничащими по выходящему из точки A красному отрезку, соприкасается одна и та же грань кубика. Значит, эти клетки должны быть одного цвета, что противоречит шахматной раскраске.

А.Шаповалов, А.Спивак

М1633. *В треугольнике ABC отрезки CM и BN – медианы, P и Q – точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B – биссектрисой угла NBQ. Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный, если а) $BP = CQ$; б) $AP = AQ$; в) $PQ \| BC$?*

Отрезки BQ и CP называются симедианами.

Теорема. *Пусть $AB = c$, $AC = b$, AS – симедиана. Тогда* $\dfrac{BS}{SC} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

Доказательство. Пусть AM – медиана; обозначим $\alpha = \angle BAS = \angle CAM$, $\angle MAS = \beta$ (рис.1). Имеем: $\dfrac{BS}{SC} = \dfrac{S_{ABS}}{S_{ASC}} = \dfrac{c\sin\alpha}{b\sin(\alpha+\beta)}$, $1 = \dfrac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \dfrac{c\sin(\alpha+\beta)}{b\sin\alpha}$.
Значит, $\dfrac{BS}{SC} = \dfrac{c^2}{b^2}$.

а) Да. Перепишем равенство $BP = CQ$, пользуясь теоремой: $b^3 + ba^2 = c^3 + ca^2$. Поскольку $f(x) = x^3 + xa^2$ – монотонная функция, получаем, что $b = c$.
К этому равенству можно прийти и так: $b^3 - c^3 = a^2(c - b)$; значит, при $b \neq c$ будет $b^2 + bc + c^2 = -a^2$; но $b^2 + bc + c^2 \geq 0$.

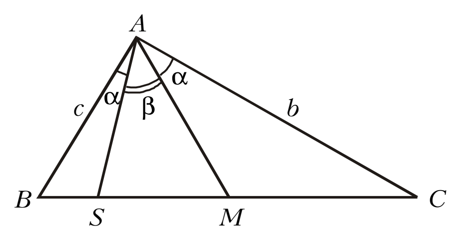


Рис.1

в) Да. $\dfrac{AQ}{QC} = \dfrac{AP}{PB}$, т.е. $\dfrac{c^2}{a^2} = \dfrac{b^2}{a^2}$.

б) Нет. $AP = c \cdot \dfrac{b^2}{b^2 + a^2}$, $AQ = b \cdot \dfrac{c^2}{c^2 + a^2}$. Перепишем $AP = AQ$: $bc(b - c) = a^2(b - c)$. Значит, в неравнобедренном треугольнике таком, что $a^2 = bc$, имеем $AP = AQ$.

Замечания

1. Если A – наибольший или наименьший угол треугольника, $AP = AQ$, то треугольник равнобедренный.
2. Неравнобедренный треугольник такой, что $AP = AQ$, – это треугольник со сторонами вида d, dq, dq^2, где $q \neq 1$.
3. Пункт б) (именно он предлагался на Турнире городов) можно решить и без помощи теоремы, пользуясь лишь соображениями непрерывности. Это можно сделать по такой, например, схеме.

Пусть для треугольника ABC будет $AP > AQ$, а для треугольника $A'B'C'$ пусть будет $A'P' < A'Q'$. «Перетянем» A в A', B в B', C в C'; по дороге нам встретится

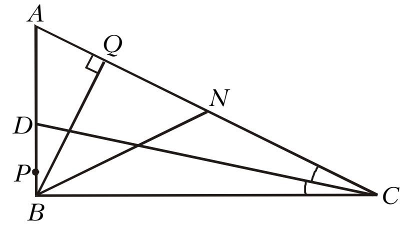


Рис.2

треугольник $A''B''C''$ такой, что $A''P'' = A''Q''$. Если возникающие при этом «перетягивании» треугольники не являются равнобедренными, то задача решена.

Приведем пример реализации этой схемы. Рассмотрим треугольник рисунка 2: $AB = 1$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$; CD – биссектриса. Так как $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$, то $AD > \frac{1}{2}$; следовательно, $AP > \frac{1}{2}$. Далее, $\angle ABQ = \angle NBC = \frac{\pi}{6}$; значит, $AQ = \frac{1}{2}$.

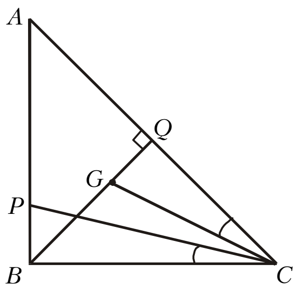


Рис.3

Рассмотрим теперь треугольник рисунка 3: $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $BC = 1$. Имеем: $AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; обозначив через G точку пересечения медиан, из подобия треугольников CQG и CBP получаем $\frac{BP}{BC} = \frac{GQ}{QC} = \frac{GQ}{BQ} = \frac{1}{3}$. Окончательно: $AP = 1 - BP = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = AQ$.

В.Сендеров

М1634. *а) На плоскость положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причем все салфетки получены одна из другой параллельными переносами. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая – только одним гвоздем?*

б) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.

а) Рассмотрим паркет из шестиугольников, равных нашим салфеткам и так же ориентированных. Поскольку салфеток конечное число, можно так сдвинуть этот паркет параллельно самому себе, что ни один центр шестиугольника паркета не будет лежать на краю салфетки.

Вобьем гвозди в центры всех шестиугольников паркета. Каждая салфетка будет прибита, притом только одним гвоздем, как и требуется в задаче.

Замечание. Утверждение о том, что паркет можно сдвинуть так, чтобы ни один центр шестиугольника паркета не оказался на краю салфетки, вполне очевидно. Тем не менее, для любителей строгости докажем его. Рассмотрим все центры салфеток, которые не лежат на краях шестиугольников паркета. Обозначим их множество через M, а их число – через n.

Если M содержит не все центры салфеток, то найдется центр A салфетки, лежащий на краю. Рассмотрим такое число δ, что расстояние от любой точки множества M до границ шестиугольников паркета больше δ. (Такое δ найдется, поскольку множество M конечно.) Сдвинем паркет параллельно самому себе на расстояние меньше δ в таком направлении, чтобы точка A не лежала на границах сдвинутых шестиугольников. Все точки множества M по-прежнему не лежат на границах шестиугольников паркета, но теперь к ним присоединилась точка A. Так, точку за точкой, мы можем все центры салфеток включить в M, сдвигая паркет.

б) Нет, на плоскости можно так расположить конечное число салфеток, что всякая система гвоздей либо пробивает какую-нибудь салфетку дважды, либо какую-нибудь не пробивает вовсе (здесь и далее рассматриваются лишь такие салфетки и способы их укладки, о которых говорится в условии задачи, т.е. равные и одинаково ориентированные правильные пятиугольники).

Для определенности, пусть радиус описанной вокруг салфетки окружности равен 1. Поместим центры салфеток в точки с координатами вида $(a \cdot 10^{-n}, b \cdot 10^{-n})$, где a и b – любые целые числа (в дальнейшем станет ясно, что нам потребуется не все бесконечное множество пар a, b, а лишь конечная его часть), n – некоторое достаточно большое натуральное число.

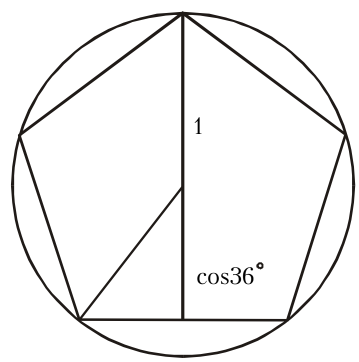


Рис.1

Предположим, что гвозди вбиты так, что каждая салфетка прибита в точности одним гвоздем. Заметим, что расстояние от вершины пятиугольника до противоположной стороны есть $1 + \cos 36°$ (рис. 1). Нетрудно убедиться, что любые две точки плоскости, расстояние между которыми не превосходит $1 + \cos 36°$, можно покрыть параллельным сдвигом пятиугольника со стороной 1.

Предположим, что расстояние между некоторыми двумя гвоздями меньше чем $1 + \cos 36°$. Эти гвозди лежат в некотором правильном пятиугольнике, стороны которого параллельны сторонам салфетки, а их длины меньше длины стороны салфетки. При достаточно большом n этот пятиугольник будет целиком покрыт некоторой салфеткой. Она окажется прибита двумя гвоздями.

Следовательно, при достаточно больших n расстояние между любыми двумя гвоздями не меньше $1 + \cos 36°$. Рассмотрим некоторый гвоздь A и круг радиусом $1 + \cos 36°$ с центром A. При достаточно большом n найдутся две салфетки, не прибитые гвоздем A, у которых только маленькие уголки высовываются за пределы круга, причем эти уголки не пересекаются друг с другом (рис.2). В эти уголки должно быть вбито по гвоздю. Расстояние между

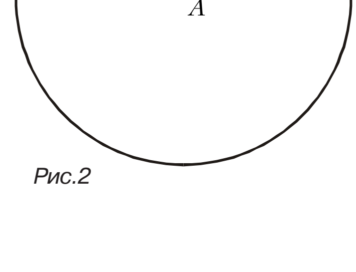


Рис.2

этими гвоздями оказывается заведомо меньше чем $1 + \cos 36°$.

А.Канель, А.Спивак

М1635[2]. *Каждая сторона правильного треугольника разбита на n равных отрезков, и через все точки деления проведены прямые, параллельные сторонам. Данный треугольник разбился на n^2 маленьких треугольников-клеток. Треугольники, расположенные между двумя соседними параллельными прямыми, образуют полоску.*

а) Какое наибольшее число клеток можно отметить, чтобы никакие две отмеченные клетки не принадлежали ни одной полоске ни одного из трех направлений, если n = 10?

б) Тот же вопрос для n = 9.

Когда жюри Турнира городов предлагало эту задачу школьникам, решение для произвольного n не было известно. Знали только, что максимальное возможное число отмеченных треугольничков есть 7 при $n = 10$ и 6 при $n = 9$. Однако участники турнира нашли общее решение.

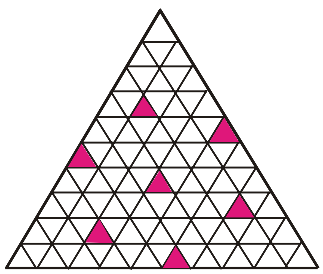


Рис.1

а) На рисунке 1 показан способ отметить 7 треугольников. Чтобы доказать, что при $n = 10$ нельзя отметить 8 треугольников, разрежем исходный треугольник средними линиями на четыре треугольника. Каждый из них состоит из 25 треугольничков. Обозначим количества отмеченных треугольничков в угловых треугольниках буквами k, l, m, а в центральном – n. Тогда $k + l + n \le 5$, поскольку два угловых треугольника вместе с центральным состоят из 5 полос. Аналогично, $l + m + n \le 5$ и $m + k + n \le 5$.

Сложим эти три неравенства: $2k + 2l + 2m + 3n \le 15$. Следовательно,

$$k + l + m + n \le \frac{1}{2}(2k + 2l + 2m + 3n) \le \frac{15}{2} < 8.$$

б) Решим задачу для произвольного n. Рассмотрим одну из сторон исходного треугольника и пронумеруем полоски соответствующего направления следующим образом: полоска, прилегающая к стороне, пусть будет иметь номер 1; следующая за ней – номер 2; ...; полоска, состоящая из одного треугольничка, примыкающего к вершине исходного большого треугольника, получит номер n.

Теперь положение любого из n^2 треугольничков можно задать тройкой чисел – номеров полосок, в которых он лежит. (Эти тройки номеров являются дискретным аналогом барицентрических координат, при которых положение любой точки, лежащей внутри правильного треугольника, определяется расстояниями до трех его сторон. Сумма этих расстояний, как легко проверить, равна высоте треугольника.)

Введенные нами тройки номеров – «координаты» треугольничков – не могут принимать произвольные значения. Их сумма равна $n + 2$, если треугольничек расположен «острием вверх» (т.е. ориентирован так же, как исходный большой треугольник), и равна $n + 1$, если «острием вниз».

Предположим, отмечены k треугольничков, никакие два из которых не попали в одну полоску. Оценим сумму S всех их координат двумя способами. С одной стороны, сумма координат любого треугольника не превышает $n + 2$, поэтому $S \le k(n + 2)$. С другой стороны, сумма значений одной из координат по всем отмеченным треугольникам не меньше чем $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$. Значит,

$$3\frac{k(k+1)}{2} \le S \le k(n+2),$$

откуда $3\frac{k+1}{2} \le n+2$, т.е. $k + 1 \le \frac{2n+4}{3}$. Итак, $k \le \frac{2n+1}{3}$...

Отметить $[(2n + 1)/3]$ треугольничков можно следующим образом. Рассмотрим число $m = [(n + 1)/3]$. На основании исходного треугольника отметим $(m + 1)$-й слева треугольничек, расположенный острием вверх. В этой же вертикали отметим и все остальные треугольнички, ориентированные острием вверх (рис.2). Всего в этой вертикали отмечено $m + 1$ треугольничков. На второй горизонтальной полосе большого треугольника отметим $(2m + 1)$-й (считая слева) треугольничек, расположенный острием вверх. Отметим и все остальные треугольнички этой вертикали, ориентированные острием вверх. Всего в этой вертикали будет отмечено $n - 1 - 2m$ треугольничков.

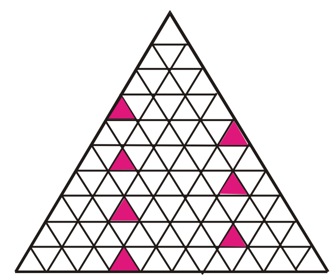


Рис.2

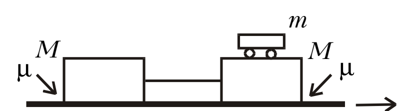
Общее количество отмеченных треугольничков есть

$$m + 1 + n - 1 - 2m = n - m = n - \left[\frac{n+1}{3}\right] = \left[\frac{2n+1}{3}\right].$$

(Чтобы проверить последнее равенство, достаточно разобрать три случая: n равно $3a$, $3a + 1$ и $3a + 2$.)

Р.Женодаров

Ф1643. *На горизонтальной подставке с коэффициентом трения μ находятся два одинаковых больших бруска массой M каждый, связанные легкой нерастяжимой натянутой нитью (см. рисунок). На гладкой верхней грани первого бруска находится небольшой гладкий грузик массой m. Подставку двигают в горизонтальном направлении с большой скоростью, направленной параллельно нити в сторону первого бруска (того, что с грузиком). Найдите силу натяжения нити, связывающей движущиеся тела, пока грузик не свалится.*



---

[2] *Автор этой задачи – Р.Женодаров, а не А.Шаповалов, как было указано в «Кванте» №2.*

Брусок с грузиком давит на подставку с силой $N_1 = (M+m)g$, второй брусок давит с силой $N_2 = Mg$. Из условия задачи ясно, что проскальзывание есть – подставку двигают очень быстро, бруски за время решения задачи не смогут набрать такой скорости (или грузик успеет упасть). Во всяком случае, будем считать, что сила трения, которая действует со стороны подставки на «тяжелый» брусок в сторону движения подставки, равна $F_1 = \mu N_1$, на «легкий» брусок действует в ту же сторону сила трения $F_2 = \mu N_2$, при этом грузик по горизонтали не ускоряется и без нити «тяжелый» брусок двигался бы с большим ускорением. Это означает, что нить остается натянутой, а ускорения брусков одинаковы. Для определения силы натяжения нити T запишем уравнения движения брусков:

$$F_1 - T = Ma,$$

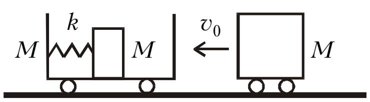
$$F_2 + T = Ma,$$

откуда, подставив соответствующие значения для F_1 и F_2, найдем

$$T = \frac{\mu mg}{2}.$$

М.Учителев

Ф1644. *На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M (см. рисунок). По дну тележки может скользить без трения груз такой же массы, прикрепленный к боковой стенке горизонтальной легкой пружинкой жесткостью k. Кубик массой M наезжает на тележку со скоростью v_0 и мгновенно прилипает к ней. Чему равна разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении?*



При ударе двух тел, описанном в условии задачи, часть кинетической энергии переходит в тепло, поэтому тут нельзя непосредственно использовать закон сохранения механической энергии. Но можно поступить иначе – вначале рассчитать удар со «слипанием», а уже потом вести расчет энергий.

Итак, после того как закончился кратковременный удар (учтем, что груз на пружинке за это короткое время не успел сместиться и набрать скорость), скорости тел можно найти из закона сохранения импульса: $v = v_0/2$, так что кинетическая энергия системы будет равна $2Mv^2/2 = Mv_0^2/4$. В моменты максимального и минимального растяжений пружинки скорость груза равна скорости тележки с прилипшим к ней кубиком, т.е. составляет $v_0/3$ (опять используем закон сохранения импульса), при этом кинетическая энергия системы равна $3M(v_0/3)^2/2 = Mv_0^2/6$. Энергия пружинки равна разности этих кинетических энергий, т.е.

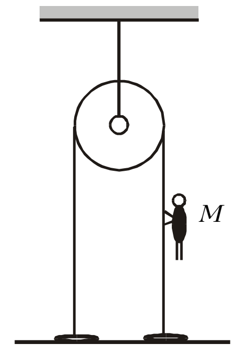
$$\frac{kx^2}{2} = \frac{Mv_0^2}{12}.$$

Отсюда можем найти разность между максимальной и минимальной длинами пружинки при движении:

$$L = 2x = v_0\sqrt{\frac{2M}{3k}}.$$

А.Кубиков

Ф1645. *Через легкий блок, закрепленный на большой высоте H над горизонтальной поверхностью земли, переброшена гибкая веревка (см. рисунок). Концы веревки сложены внизу двумя бухтами, которые не препятствуют движению. С одной стороны за веревку ухватился человек массой M, который быстро перебирает руками, стараясь висеть на одной высоте над землей. При некоторой установившейся скорости движения веревки это ему удается. Найдите эту скорость. Масса одного метра веревки ρ, ускорение свободного падения g. Трение в блоке отсутствует.*



Веревка с двух сторон блока уравновешена, «избыточная» сила определяется весом человека и равна Mg. В установившемся режиме эта сила «вытягивает» веревку из бухты с противоположной стороны блока, сообщая импульс вытянутым кускам. Пусть скорость установившегося движения u, тогда за время τ длина веревки, вступившей в движение, составит $u\tau$, масса этой веревки $\rho u\tau$, а изменение импульса $\rho u^2\tau$. Приравняем это изменение импульса к произведению «избыточной» силы на время ее действия:

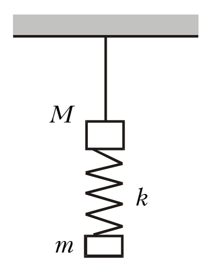
$$\rho u^2 \tau = Mg\tau.$$

Тогда искомая скорость будет

$$u = \sqrt{\frac{Mg}{\rho}}.$$

З.Рафаилов

Ф1646. *На легкой нити к потолку подвешен груз массой M, к нему на очень легкой пружинке жесткостью k прикреплен груз массой m (см. рисунок). Система вначале неподвижна. Нить пережигают, и грузы начинают падать в однородном поле тяжести. Чему равна разность между максимальным и минимальным значениями длины пружинки? Через какое время после пережигания нити натяжение пружинки в первый раз станет нулевым? Считайте, что за время, необходимое для решения задачи, грузы еще не упадут на пол.*



После пережигания нити система начинает падать, и ускорение ее центра масс равно g. Движение грузов относительно друг друга связано только с силой упругости пружинки. Это позволяет поместить два груза, связанные пружинкой, на гладкую горизонтальную поверхность, растянуть пружинку на $x = mg/k$ и предоставить самой себе. Ясно, что система будет колебаться.

Очень легко ответить на первый вопрос задачи – разность между максимальной и минимальной длинами пружинки будет равна

$$\Delta L = 2x = \frac{2mg}{k}.$$

На второй вопрос ответить немного труднее. Центр масс системы остается на месте (мы положили систему на горизонтальный стол, и ее скорость в начальный момент была нулевой); это означает, что каждый груз движется под действием «своей» части пружинки – от центра масс до соответствующего груза. Получившиеся куски имеют большую жесткость, чем исходная пружинка, – жесткость куска, присоединенного к грузу массой m, составляет $k_1 = k(M+m)/M$, жесткость второго куска равна $k_2 = k(M+m)/m$. Очевидно, что грузы колеблются в противофазе, а период колебаний составляет

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k_2}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

Искомое время равно четверти периода колебаний:

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}}.$$

А.Повторов

Ф1647. *В глубоком космосе на большом расстоянии от всех других тел движется длинная цилиндрическая труба, запаянная с одного конца. Неподалеку от этого конца приклеен поршень массой M = 1 кг, отделяющий от окружающего вакуума 1/100 полного объема трубы. В этой части трубы находится небольшая порция азота при температуре T = 300 К и давлении p = 0,5 атм. В некоторый момент поршень отклеивается и под давлением газа начинает скользить без трения вдоль трубы. Определите, через какое время после начала движения поршень вылетит из трубы. Длина трубы L = 5 м, площадь поперечного сечения S = 100 см², масса трубы в 10 раз больше массы поршня.*

Будем считать, что труба не вращается – иначе решение задачи усложнится (хотя при заданных массах трубы и поршня разница будет незначительной). Газ при расширении охлаждается, его внутренняя энергия переходит в кинетическую энергию трубы и поршня (масса газа оказывается очень малой, так что при расчете кинетической энергии и импульса системы с ней можно не считаться). Поскольку объем газа увеличивается во много раз и приток тепла отсутствует, можно считать, что температура газа в конце процесса будет совсем малой и в кинетическую энергию перейдет практически вся его внутренняя энергия, равная $U = 2{,}5\nu RT = 2{,}5pV = 2{,}5pSL/100 = 62{,}5$ Дж.

При отношении масс 10:1 тяжелая труба получит 1/11 часть общей энергии, а поршень получит 10/11 от энергии газа, т.е. его энергия в конце составит $E \approx 56{,}7$ Дж. Это соответствует скорости поршня $v = \sqrt{2E/M} \approx 10{,}7$ м/с. Скорость трубы при этом будет направлена в противоположную сторону и равна $0{,}1v \approx 1{,}07$ м/с. Если бы с самого начала скорости были такими, поршень вылетел бы из трубы через время $\tau = 0{,}99L/(1{,}1v) \approx 0{,}42$ с.

Оценим время набора скорости – если оно окажется существенно меньше τ, ответ можно считать полученным (строго говоря, скорость увеличивается все время, вплоть до самого вылета, но все медленнее и медленнее, а нас интересует приближенное значение). Итак, в самом начале движения на поршень действует сила $F = pS$ и его начальное ускорение составляет $a = pS/M = 500$ м/с². Если бы ускорение не менялось, поршень набрал бы свою скорость за время 0,02 с, что существенно меньше времени процесса, рассчитанного выше. Понятно, что скорость будет практически достигнута через время, которое в несколько раз больше полученного интервала 0,02 с, но и им можно для оценки пренебречь.

Таким образом, время до вылета поршня составляет примерно 0,4 секунды.

Р.Александров

Ф1648. *В сосуде объемом V = 100 л находится воздух при нормальных условиях. Снаружи – вакуум. В стенке сосуда на время τ = 1 с открывается небольшое отверстие площадью S = 0,1 см² и сразу после этого закрывается. Оцените количество вылетевших за это время молекул и их суммарную энергию. Кстати заметим, что воздух – смесь двухатомных газов.*

Оценим число вылетевших из сосуда молекул и сравним его с полным числом молекул газа N – если вылетевшая часть велика, то решение задачи сильно усложнится. Число вылетевших молекул посчитаем так же, как обычно считают число ударов молекул о стенки сосуда: $N_{\text{уд}} = 0{,}5Su_x\tau N/V$. Скорость, точнее – составляющую скорости молекулы вдоль заданного направления, оценим через энергию поступательного движения молекул: $u_x = \sqrt{kT/m} = \sqrt{RT/M_{\text{ср}}} \approx 280$ м/с. Итак, за данное время вылетела часть молекул, равная $N_{\text{уд}}/N = 0{,}5\,Su_x\tau/V \approx 0{,}14$. Видно, что для оценки можно считать неизменными давление газа в сосуде и его температуру (впрочем, можно сделать небольшие поправки, пользуясь для расчетов средними значениями). Число молекул в сосуде равно $N = N_{\text{А}}pV/(RT)$. Тогда число вылетевших молекул будет

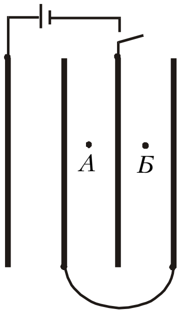
$$N_{\text{в}} = N_{\text{уд}} = 0{,}5Su_x\tau N/V = 0{,}5Su_x\tau N_{\text{А}}p/(RT) \approx 3{,}5\cdot 10^{22}.$$

При обычных условиях длина свободного пробега молекул в воздухе очень мала, поэтому истечение молекул из отверстия скорее напоминает движение «сплошной среды» – молекулы движутся в заданном направлении толкая друг друга, но практически не обгоняя одна другую. Выделим в сосуде ту область около отверстия, из которой молекулы успеют «эмигрировать». Обозначим объем этой области V_1 и запишем для этих молекул уравнение состояния: $pV_1 = \nu_1 RT$. Вылетая наружу, эти молекулы имеют в среднем большую энергию, чем оставшиеся в сосуде, – над этой порцией газа совершил работу окружающий газ, выталкивая порцию наружу. Если считать давление газа в сосуде неизменным, то работа эта равна $A = pV_1$. Поэтому энергия вылетевшей порции газа (смесь двухатомных газов) составляет

$$U = 2{,}5\nu_1 RT + A = 3{,}5\nu_1 RT = 3{,}5\frac{N_{\text{в}}}{N_{\text{А}}}RT = 3{,}5N_{\text{в}}kT \approx 460 \text{ Дж}.$$

К.Томов

Ф1649. *Конденсатор емкостью C состоит из двух параллельных пластин, находящихся на малом расстоянии друг от друга. Конденсатор зарядили до напряжения U_0 и отключили от источника. Посредине конденсатора параллельно его пластинам вставлена еще одна*



пластина, и еще одна пластина расположена параллельно снаружи, так что эти дополнительные пластины образуют точно такой же конденсатор (см. рисунок). Дополнительные пластины соединяют между собой проводником, имеющим большое сопротивление. Какое количество теплоты выделится в этом проводнике?

После отсоединения источника заряды пластин конденсатора не меняются и его энергия равна

$$E_1 = \frac{CU_0^2}{2}.$$

После введения еще двух пластин и соединения их между собой на этих пластинах произойдет перераспределение зарядов и их потенциалы станут равными. У нас получатся три заряженных конденсатора, емкость каждого из которых вдвое больше исходной величины C (расстояние между обкладками полученных конденсаторов в два раза меньше, чем у исходного). Поля в точках A и $Б$ равны по величине и противоположны по направлению, поле в точке A равно сумме полей исходных зарядов пластин первого конденсатора и «новых» зарядов, а поле в точке $Б$ создается только «новыми» зарядами, поэтому ясно, что их поле составит ровно половину поля исходных зарядов. Таким образом, один из получившихся конденсаторов заряжен до напряжения $U_0/2$ (прежнее поле, но половина расстояния между пластинами), два других – до напряжений $U_0/4$ и $-U_0/4$ (поля в этих конденсаторах в два раза меньше). Общая энергия теперь составляет

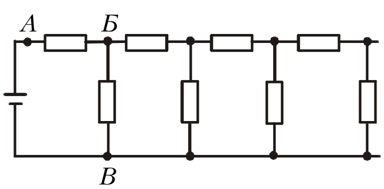
$$E_2 = \frac{2C(U_0/2)^2}{2} + \frac{2C(U_0/4)^2}{2} + \frac{2C(-U_0/4)^2}{2} = \frac{3CU_0^2}{8}.$$

Разность энергий и дает выделившееся тепло:

$$Q = E_1 - E_2 = \frac{CU_0^2}{8}.$$

А.Зильберман

Ф1650. *Электрическая цепь составлена из большого количества одинаковых звеньев (см. рисунок). Каждое такое звено состоит из двух резисторов. К началу цепи*



подключен источник постоянного напряжения $U = 12$ В. Идеальный амперметр подключают параллельно первому резистору цепи (между точками А и Б), и он показывает силу тока $I_1 = 5$ мА. Если тот же амперметр подключить между точками Б и В (параллельно второму резистору), то он покажет $I_2 = 2$ мА. Определите по этим данным сопротивления резисторов одного звена.

Сопротивление резистора из горизонтального ряда найти совсем просто. Когда амперметр включен между точками $Б$ и $В$, все напряжение источника приложено к этому резистору, измеряемый ток течет через этот резистор, поэтому его сопротивление равно

$$R = \frac{U}{I_2} = 6 \text{ кОм}.$$

Найти сопротивление r «вертикального» резистора сложнее – при подключении амперметра между точками A и $Б$ он показывает сумму токов этого резистора и всей остальной бесконечной цепи. Обозначим сопротивление этой цепи через X, тогда

$$I_1 = \frac{U}{r} + \frac{U}{X} = \frac{U(r+X)}{rX}.$$

Сопротивление X можно выразить известным способом: при добавлении одного звена к такой длинной цепочке ее сопротивление не должно практически измениться:

$$X = R + \frac{rX}{r+X},$$

или

$$\frac{rX}{r+X} = X - R.$$

Тогда

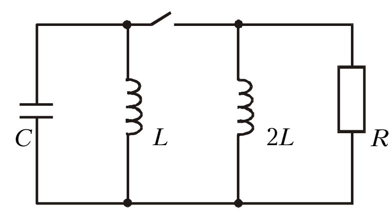
$$\frac{rX}{r+X} = X - R = \frac{U}{I_1} = 2{,}4 \text{ кОм}.$$

Отсюда

$$X = 8{,}4 \text{ кОм} \text{ ,и } r = 3{,}36 \text{ кОм}.$$

А.Зильберман

Ф1651. *Конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U_0. К нему подключают катушку индуктивностью L и в некоторый момент к выводам катушки подключают цепочку из параллельно соединенных катушки индуктивностью $2L$ и резистора с большим сопротивлением R (см. рисунок). Какое количество теплоты выде-*



лится в резисторе? Зависит ли эта величина от момента подключения цепи к катушке? Элементы цепи считайте идеальными.

Пусть подключение произошло в тот момент, когда ток через катушку был равен I. В тепло перейдет при этом не вся энергия, запасенная контуром, – часть энергии останется в виде энергии магнитного поля тока, протекающего по контуру из двух идеальных катушек. Найдем эту энергию. Магнитный поток через сверхпроводящий контур (составленный из двух идеальных катушек) не изменяется. Если катушки расположены далеко друг от друга (или специально повернуты нужным образом), то можно пренебречь магнитным потоком, создаваемым полем одной катушки и пронизывающим другую (взаимной индукцией). В этом случае

$$LI = LI_1 + 2LI_1, \text{ отсюда } I_1 = \frac{I}{3}.$$

Энергия магнитного поля в этих двух катушках равна

$$\frac{LI_1^2}{2}+\frac{2LI_1^2}{2}=\frac{LI^2}{6}.$$

Итак, в тепло перешла разность энергий конденсатора $CU_0^2/2$ (энергия системы в начальный момент) и катушек, т.е.

$$Q=\frac{CU_0^2}{2}-\frac{LI^2}{6}.$$

Видно, что при подключении цепочки в момент нулевого тока через катушку в тепло уйдет вся запасенная энергия, т.е.

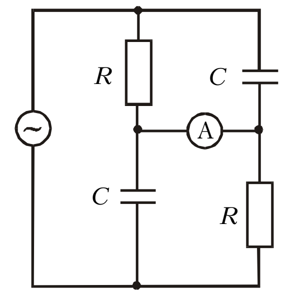
$$Q_0=\frac{CU_0^2}{2}.$$

Минимальное же количество теплоты выделится при максимальном токе катушки, который можно определить из соотношения $CU_0^2/2 = LI_m^2/2$. При этом в контуре останется треть начальной энергии, а в тепло перейдут две трети, т.е.

$$Q_m=\frac{CU_0^2}{3}.$$

М.Учителев

Ф1652. *К простой цепи, собранной из двух резисторов сопротивлением R = 1 кОм и двух конденсаторов емкостью C = 1 мкФ, подведено напряжение сети: 220 В, 50 Гц (см. рисунок). Амперметр в схеме имеет очень маленькое сопротивление. Найдите показание амперметра. Обычно приборы переменного тока градуируются в действующих (эффективных) значениях.*



Амперметр по условию имеет пренебрежимо малое сопротивление, поэтому его можно заменить куском провода. Сразу видно, что последовательно к сети подключены две одинаковые цепочки, при этом напряжение на каждой из них составляет 110 В. Ток через резистор равен $I_R = U/(2R) = 110$ мА, а ток через конденсатор равен $I_C = U/(2X_C) = U\omega C/2 \approx 35$ мА. Амперметр показывает разность токов «верхнего» резистора и «нижнего» конденсатора, но с учетом сдвига фаз результирующий ток нужно находить по теореме Пифагора:

$$I_{\text{A}}=\sqrt{I_R^2+I_C^2}\approx 115\ \text{мА}.$$

А.Зильберман

Победители конкурса «Задачник Кванта» 1997 года

I место заняли

по математике

Гуляев Михаил – Нижний Новгород, школа 139,

по физике

Гуляев Леонид – Нижний Новгород, школа 86.

II место заняли

по математике

Землякова Анна – Чебоксары, ФМЛ 27,
Кукина Екатерина – Омск, ФМЛ 64,

по физике

Янышин Александр – Канаш, школа 9.

III место заняли

по математике

Гаврилин Кирилл – Железногорск Курской обл., школа 11,

по физике

Белобородов Максим – Архангельск, школа 22.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Самборский Александр – Кирово-Чепецк, школа 3,
Букарев Александр – Бор Нижегородской обл., ННГУ,
Волков Олег – Димитров Донецкой обл., Донецкий технический колледж,
Гусев Дмитрий – Пенза, лингвистическая гимназия 6,

по физике

Уфимцев Иван – Новомосковск Тульской обл., Новомосковский лицей,
Агафонов Дмитрий – Киров, ФМЛ.

Победители, занявшие первые места по математике и по физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 1998 года.