## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

*(см. «Квант» №4)*

**1.** Покажем, что на доске не может быть написано более одного положительного числа. Пусть $M$ – наибольшее положительное число из написанных на доске чисел, причем имеется еще по крайней мере одно число $m$ такое, что $0 < m \le M$. Тогда на доске должно быть записано также и число $m + M$, большее $M$, что невозможно. Аналогично показывается, что на доске не может быть написано и более одного отрицательного числа. Итак, написано либо два, либо три числа, например: {0, 2} или {–2, 0, 2}.

**2.** Обозначим через $x$ год рождения члена редколлегии, а через $y$ – его возраст. По условию задачи

$$x + (x + y) - (x + 20) - (x + 30) = 16 .$$

Решая это уравнение, находим $y = 66$.

**3.** Распилить обычную доску $8 \times 8$ клеток так, как это требуется в условии задачи, невозможно. Однако шашисты сражаются и на стоклеточных досках. Такую доску можно разделить, причем несколькими способамию

**4.** Перебрав варианты, находим $\sqrt[2]{64} = 8$ или $\sqrt[6]{64} = 2$. Показатель извлекаемой степени 2 в школьном учебнике писать не принято. Поэтому истинным можно считать лишь ответ $\sqrt[6]{64} = 2$.

**5.** Допустим, что никакая ладья не бьет другую. Значит, на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит строго по одной ладье. Тогда в вертикальных рядах с нечетными номерами – по их числу – стоит ровно 6 ладей. Но эти 6 ладей стоят в пяти горизонтальных рядах с четными номерами, и, следовательно, в каком-то горизонтальном ряду две ладьи бьют друг друга.

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

**Вопросы и задачи**

**1.** 312,5 г.

**2.** Так как длина стержня остается неизменной, проекции скоростей его концов на ось стержня должны быть равными (рис.1). Расчет дает $v_B = v_A \operatorname{tg} \alpha$.

**3.** При вращении на стержне минимальная скорость грузика в верхней точке равна нулю, а при вращении на нити она больше нуля, поскольку нить должна быть все время натянутой – вплоть до верхней точки. Следовательно, в нижнем положении грузику на нити нужно сообщить большую скорость.

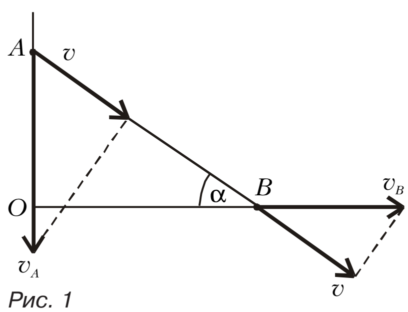

Рис. 1

**4.** Большее давление выдерживает круглая колба, так как ее стенки испытывают сжатие, а плоское дно – изгиб (известно, что прочность на изгиб меньше).

**5.** Расширившаяся от нагревания металлическая крышка не так крепко держится на стеклянной резьбе.

**6.** Шарик пройдет сквозь нагретое кольцо.

**7.** Теплопроводность слежавшегося снега больше теплопроводности деревянной доски, поэтому вокруг доски снег будет таять быстрее, чем под доской. Теплопроводность же металлической пластины, напротив, много больше теплопроводности слежавшегося снега, поэтому под ней снег будет таять быстрее.

**8.** Благодаря лучшей теплопроводности меди (по сравнению с железом или сталью) припой и материал, на который он наносится, быстрее нагреваются.

**9.** При предварительном ополаскивании чайника кипятком он нагревается, и вода, налитая во второй раз (для заварки), оказывается более горячей. Из-за большей теплоемкости и меньшей теплопроводности фарфоровый чайник остывает медленнее, чем медный.

**10.** Дно сосуда имеет более высокую температуру, чем кипящая в нем вода. Благодаря хорошей теплопроводности стали, нижний шар в месте его соприкосновения с дном сосуда будет иметь более высокую температуру, поэтому под ним расплавится больше льда.

**11.** Количество теплоты, выделяемое в стержне, при постоянном напряжении будет тем больше, чем меньше его сопротивление. Так как асбест замедляет отдачу тепла в окружающее пространство, стержень под асбестом будет горячее. Но сопротивление графита падает с повышением температуры, поэтому тепла выделится больше, когда стержень покрыт асбестом.

**12.** Во вращающемся цилиндре происходит перераспределение свободных электронов, и возникает электрическое поле, направленное вдоль радиуса от оси цилиндра к его периферии.

**13.** Нет, так как электрическое сопротивление полупроводников при понижении температуры возрастает.

**14.** Нагреваемая горелкой проволочка теряет свои магнитные свойства, силы притяжения симметрично расположенных проволочек перестают уравновешиваться, и вертушка начинает вращаться.

**15.** Так как сопротивление кольца равно нулю, суммарная ЭДС в нем всегда должна быть равна нулю. Это значит, что полный поток магнитной индукции через кольцо не будет меняться, следовательно, поле индукционных токов в кольце направлено всегда против поля электромагнита, т.е. кольцо будет отталкиваться от электромагнита.

**16.** Поскольку скорость звука в металле больше, чем в воздухе, первый удар обусловлен звуковой волной, прошедшей по трубе, а второй – волной, прошедшей по воздуху.

**17.** Для калориметра важно, чтобы как можно меньше тепла уходило наружу, а металл излучает тепла меньше, чем стекло.

**18.** В отличие от черного угля, почти полностью поглощающего видимый свет, белый мел этот свет отражает. Поэтому при нагревании мел излучает значительно меньше, чем уголь.

**19.** В солнечном спектре максимум излучения приходится на видимую часть спектра, которая стеклом пропускается. Накрывая парники стеклом, мы пропускаем к земле солнечное тепло, но не выпускаем наружу излучаемые землей тепловые лучи.

**Микроопыт**

Железо, обладая хорошей теплопроводностью, отводит тепло от бумаги, поэтому она не загорится.

## ПОКРЫТИЯ ПОЛОСКАМИ

**1.** Проведем через вершины $A$, $B$ и $C$ треугольника перпендикуляры к сторонам полосы. Исключительный случай, когда некоторые два из этих перпендикуляров совпадают, разберите самостоятельно. В общем случае один из перпендикуляров $p$ попадет между двумя другими (на рисунке 4 в статье такая прямая $p$ проходит через $B$). Прямая $p$ пересечет сторону $AC$ в некоторой точке $D$. Разумеется, длина отрезка $BD$ не превышает ширины полосы. В то же время высота $h$ треугольника, опущенная из $B$ на сторону $AC$, не превосходит $BD$.

**2.** 12 см.

**3.** а) Наибольшая сторона; б) диагональ; в) диаметр окружности.

**4.** Для прямоугольных.

**7.** Для любых точек $A$ и $B$ фигуры $F$ расстояние между перпендикулярными отрезку $AB$ опорными прямыми не меньше длины отрезка $AB$. Поэтому диаметр фигуры $F$ не превосходит максимальной из ширин фигуры $F$. С другой стороны, ширина любой полосы, образованной опорными прямыми фигуры $F$, не превосходит диаметра фигуры.

**8.** а) Может. Если $F$ — внутренность круга, то граница фигуры $F$ (окружность) не входит в $F$.

б) Может. Например, ось абсцисс — опорная прямая к ветви гиперболы $y = 1/x$, $x > 0$ — не имеет с гиперболой общих точек.

*Замечание*. Можно доказать, что если фигура $F$ замкнута и ограничена, то любая опорная прямая имеет с $F$ хотя бы одну общую точку.

**11.** Из любого. *Указание*. Разберите два случая: когда средний по величине угол треугольника больше $60°$ и когда это не так.

**14.** а) $ab/(a+b)$; б) $hc/(h+c)$. в) Поскольку $ab = hc$, достаточно сравнить значения выражений $h + c$ и $a + b$. Воспользуемся формулой $r = (a + b - c)/2$ для радиуса $r$ вписанной окружности прямоугольного треугольника. Поскольку $h > 2r$, имеем $h > 2r = a + b - c$, откуда $h + c > a + b$.

*Замечание*. Если бы мы выразили ответ пункта б) не через высоту $h$ и гипотенузу $c$, а через катеты $a$ и $b$, то возникла бы необходимость сравнить между собой значения выражений $ab/(a+b)$ и $ab\sqrt{a^2+b^2}\Big/(a^2+ab+b^2)$.

**15.** Поставим такую задачу: вписать в треугольник с углом $2\varphi$, где $2\varphi$ — величина угла правильного $2n$- угольника, правильный $2n$-угольник наибольшего возможного периметра. Рассмотрим два расположения правильного $2n$-угольника внутри такого треугольника (рис. 2, 3).Обозначим длины сторон треугольника, образующих угол $2\varphi$, через $x$ и $y$. Тогда третья сторона равна $z = \sqrt{x^2+y^2-2xy\cos 2\varphi}$.

Найдем длину стороны правильного $2n$-угольника в обоих случаях.

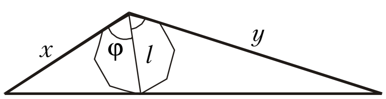

Рис. 2

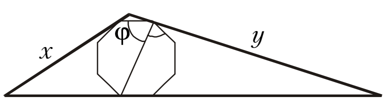

Рис. 3

*Случай 1* (см. рис. 2). Диаметр $l$ описанной окружности $2n$-угольника равен биссектрисе треугольника, т.е. $l = \dfrac{2xy\cos\varphi}{x+y}$. Значит, искомая сторона равна

$$a_1 = l\cos\varphi = \frac{2xy\cos^2\varphi}{x+y}.$$

*Случай 2* (см. рис. 3).

Из подобия маленького (верхнего) и всего большого треугольников следует равенство $\dfrac{h}{h - a_2\,\mathrm{tg}\varphi} = \dfrac{z}{a_2}$, где $h$ — высота большого треугольника, $a_2$ — искомая сторона $2n$-угольника. Значит,

$$a_2 = \frac{hz}{h + z\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{hz^2}{hz + z^2\,\mathrm{tg}\varphi} = \frac{xyz\sin 2\varphi}{xy\sin 2\varphi + z^2\mathrm{tg}\varphi} = \frac{2xyz\cos^2\varphi}{x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi}.$$

Для доказательства неравенства $a_1 > a_2$ осталось показать, что $\dfrac{1}{x+y} > \dfrac{z}{x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi}$. В левой части этого неравенства — среднее арифметическое чисел $(x+y)(x^2+2xy\sin^2\varphi)$ и $(x^2+y^2-2xy\cos 2\varphi)/((x+y)(x^2+y^2+2xy\sin^2\varphi))$, а в правой части — среднее геометрическое этих же чисел (проверьте!). Дальнейшее рассуждение аналогично решению задачи 2 в статье.

**22.** *Первый способ*. Пусть квадрат со стороной $a$ разбит на прямоугольники размером $a_i \times b_i$, где $a_i \le b_i$. Тогда сумма площадей $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ всех прямоугольников разбиения равна $a^2$. Поскольку $b_i \le a$, имеем $a^2 = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \le \le a_1a + \ldots + a_na$. Осталось разделить обе части последнего неравенства на $a$.

*Второй способ*. Каждый прямоугольник разбиения покроем полосой, перпендикулярной самой короткой стороне прямоугольника (если прямоугольник является квадратом, то выберем любую из двух полос). Дальше можно сослаться на теорему Банга-Тарского. А можно просто сказать, что если сумма меньших сторон прямоугольников меньше стороны квадрата, то в квадрате найдутся как не покрытая вертикальными полосами вертикаль, так и не покрытая горизонтальными полосами горизонталь. Точка их пересечения не будет покрыта ни горизонтальными, ни вертикальными полосами.

**25.** Чтобы покрыть правильный $2n$-угольник, необходимо покрыть весь вписанный в него круг. Среди вписанных в этот круг правильных $2n$-угольников, в свою очередь, содержится многоугольник со сторонами, параллельными сторонам исходного $2n$-угольника.

**27.** *Указание*. Спроецируйте вписанные фигуры вдоль данной прямой на перпендикулярную прямую. Другими словами, рассмотрите ширины фигур в соответствующем направлении.

**29.** Воспользуемся формулой $S = Pr/2$, выражающей площадь описанного многоугольника через его периметр $P$ и радиус вписанной окружности $r$. Если $P_1, \ldots, P_n$ — периметры треугольников разбиения, то

$$\frac{1}{2}Pr = \frac{1}{2}P_1r_1 + \ldots + \frac{1}{2}P_nr_n,$$

откуда

$$r = \frac{P_1}{P}r_1 + \ldots + \frac{P_n}{P}r_n \le r_1 + \ldots + r_n,$$

поскольку периметры $P_1, \ldots, P_n$ треугольников не превосходят периметра $P$ объемлющего многоугольника.

**30.** *Указание*. Допустив противное, т.е. предположив, что сумма углов $K_1KM$ и $M_1MK$ больше $180^\circ$, поверните немного эти лучи друг к другу так, чтобы получились два новых луча $KK'$ и $MM'$, которые пересекают внутренность фигуры $F$, а сумма углов $K'KM$ и $M'MK$ по-прежнему больше $180^\circ$. Проведя в достаточной близости от $KM$ параллельный $KM$ отрезок с концами на этих лучах, получите отрезок, целиком лежащий в $F$, длина которого больше $MN$.

**32.** Ширина полосы, ограниченной прямыми $k$ и $m$, не превосходит длины $KM$. Ширина $w$ фигуры $F$ не превосходит ширины любой полосы, в которой содержится фигура. Значит, $w \le KM$.

## ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ПРИБОРЫ

**1.** $l = 3F/2$. **2.** *Указание.* Сделайте соответствующее построение. **3.** $l = F/2$. **4.** Источник сместится в ту же сторону на расстояние $y = x = 2$ см.

**5.** $l = \dfrac{L(n-1)}{\big((dD-1)n - LD(n-1)\big)(dD-1)} = 40$ см.

**6.** $\dfrac{1}{d_{2*}} = \dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} - \dfrac{1}{d_{1*}} = 0$, $d_{2*} \to \infty$.

**7.** $F = F_1F_2/\Delta$, где $\Delta$ − расстояние между задним фокусом первой линзы и передним фокусом второй (так называемый оптический интервал); эквивалентная линза находится на расстоянии $a = -lF_2/\Delta$ от второй линзы.

## XXIV ВСЕРОССИЙСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

### Зональный этап

#### *8 класс*

**1.** *Ответ*: не существуют.

**2.** *Ответ*: не могут. *Указание*. Предположив противное, докажите, что в треугольнике $BAL$ (рис.4) отрезок $AK$ является медианой и биссектрисой. Следовательно, он является и высотой, т.е. $AK \perp BD$. Аналогично, $AL \perp BD$. Но два различных перпендикуляра из одной точки $A$ на прямую $BD$ опустить нельзя.

**3.** Назовем характеристикой колоды количество имеющихся в ней карт той масти, которой в колоде осталось больше все-

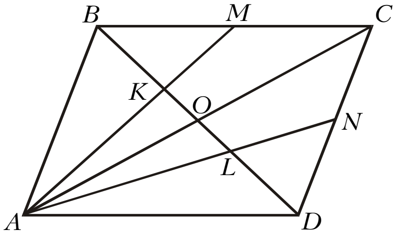

Рис. 4

го. При каждом ходе характеристика либо не меняется, либо уменьшается на 1. В последнем случае, очевидно, берется карта загаданной масти. Поскольку в начале характеристика колоды равнялась 13, а в конце – 0, по ходу игры она уменьшалась 13 раз.

**4.** *Указание.* Так как любые 9 точек лежат на двух окружностях, то найдется окружность $O$, на которой лежит не менее 5 точек. Рассмотрим все точки множества, не лежащие на $O$. Если таких точек четыре или меньше, то утверждение задачи верно.

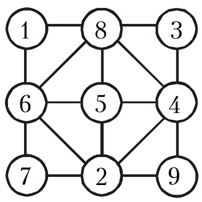

Рис. 5

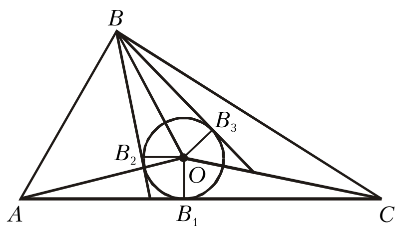

Рис. 6

Пусть вне окружности $O$ лежит не менее пяти точек. Возьмем пять точек $A_1$, …, $A_5$ на $O$ и три точки $B_1$, $B_2$, $B_3$ вне $O$. Через точки $B_1$, $B_2$, $B_3$ проходит единственная окружность $O_1$. Возьмите теперь любую точку $B$, отличную от $A_1$, …, $A_5$, $B_1$, $B_2$, $B_3$, и докажите, что она принадлежит одной из окружностей $O$ или $O_1$.

**5.** Пример приведен на рисунке 5.

**7.** *Указание.* Для окружности $S_B$ из равенства треугольников $B_2OB$, $B_3OB$, $B_1OA$ и $B_1OC$ (рис.6) следует, что $\angle B_2BB_3 = \angle OAC + \angle OCA$. Аналогичные равенства верны и для $S_A$ и $S_C$.

**8.** Прогноз, в котором нет нулей, окажется *нехорошим*, если все избиратели не явятся на выборы. Поэтому в каждом *хорошем* прогнозе должны быть нули. Пусть в прогнозе П у кандидата $A$ и некоторых из его друзей $A_1$, …, $A_k$ – 0 голосов. Тогда при явке $A$ на выборы прогноз по $A$, $A_1$, …, $A_k$ ошибочен. Исключим $A$, $A_1$, …, $A_k$ из списков кандидатов и уменьшим на 1 прогноз по остальным друзьям $A$. Тогда мы вернемся к исходной задаче, но с меньшим числом кандидатов и меньшим на одного человека ($A$) числом избирателей. Продолжая эту процедуру, мы приходим к несовпадению по каждому кандидату числа поданных голосов с прогнозируемым. Значит, исходный прогноз – *нехороший.*

### 9 класс

**1.** *Ответ:* все треугольники, длины сторон которых пропорциональны 3, 4 и 5. *Указание.* Диаметр $2r$ вписанной в треугольник окружности меньше любой из ее сторон. Поэтому прогрессия имеет вид $2r$, $2r + d$, $2r + 2d$, $2r + 3d$. Выразите $d$ через $r$, воспользовавшись формулами Герона и $S = pr$.

**2.** По теореме о вписанных углах имеем равенства: $\angle PAC = \angle PQC$, $\angle PBD = \angle PQD$. Угол $\angle PBD$ – внешний для треугольника $ABP$, поэтому $\angle PBD = \angle PAB + \angle APB$. Отсюда $\angle APB = \angle PBD - \angle PAB = \angle PBD - \angle PAC = \angle PQD - \angle PQC = \angle CQD$, что и требовалось.

**3.** *Ответ*: $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$.

*Указание.* Если все цифры десятизначного числа различны, то их сумма равна 45, и потому это число делится на 9. Значит, если оно делится на 11111, то оно делится и на 99999. Десятизначное число $X = \overline{a_9 \ldots a_0} = 10^5 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0} = 99999 \cdot \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$ делится на 99999 тогда и только тогда, когда делится на 99999 сумма $\overline{a_9 \ldots a_5} + \overline{a_4 \ldots a_0}$. Эта сумма меньше чем $2 \cdot 99999$. Поэтому она делится на 99999 тогда и только тогда, когда она равна 99999. А это равносильно тому, что $a_0 + a_5 = 9$, $a_1 + a_6 = 9$, $a_2 + a_7 = 9$, $a_3 + a_8 = 9$ и $a_4 + a_9 = 9$. Таким образом, последние пять цифр интересного числа полностью определяются пятью его первыми цифрами, а первые пять цифр можно выбирать произвольно, следя только, чтобы никакие две из них не давали в сумме 9 и $a_9$ не равнялось нулю.

**4.** *Ответ*: 4. *Указание.* Докажите, что всякую связную фигуру, составленную из 101 клетки, можно заключить в прямоугольник с такими сторонами $a$ и $b$, что $a + b = 102$. Поэтому 4 фигуры, равные данной, удастся вырезать всегда: для этого достаточно заключить ее в прямоугольник с суммой сторон 102, а затем вырезать из данного квадрата четыре таких прямоугольника так, как показано на рисунке 7. В то же время из квадрата нельзя вырезать больше 4-х фигур, имеющих форму креста, каждый «луч» которого состоит из 25 клеток.

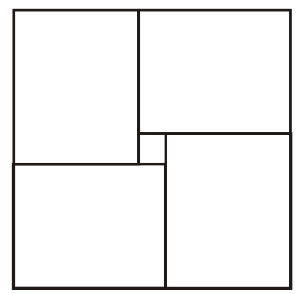
Рис. 7

**5.** *Ответ:* не могут.

**6.** *Ответ:* выиграет первый. Сначала ему надо делать ходы длиной в 4 клетки, пока он не встанет на 45-ю клетку. Теперь очередь хода за вторым. Если он тоже все время делает ходы длины 4, очередной ход приведет его на клетку 57. Тогда первый следующим ходом должен пойти на клетку 48 и после ответа второго пойти так, чтобы между ним и вторым оказалось 3 клетки (легко видеть, что это всегда возможно). После этого второй будет вынужден пойти на 1, 2 или 3 клетки и окажется в итоге правее 49-й клетки. Значит, до финиша ему останется больше 48 клеток, и, чтобы добраться туда, он должен будет сделать не меньше 13 ходов. Первый же находится не левее 49-й клетки, и ему до финиша остается не более 52 клеток, которые он сумеет преодолеть за 13 ходов.

Рассмотрим теперь случай, когда среди 11 первых ходов второго был ход менее чем на 4 клетки. Тогда он после 11-го хода окажется более чем в 56 клетках от цели, и для ее достижения ему понадобится минимум 15 ходов, а первому до цели остается 55 клеток, и он сможет добраться до нее за 15 ходов, даже если второй при встрече вынудит его сделать ход длины 3 вместо хода длины 4.

**7.** *Указание.* Пусть $B_1$ — середина стороны $A_1A_2$ и $B_1B_2$, … …, $B_{1998}B_1$ — траектория шара. Докажите, что треугольники $B_1A_2B_2$, $B_2A_3B_3$,…, $B_{1998}A_1B_1$ попарно равны. Для этого воспользуйтесь их почти очевидным подобием (подсчитайте их углы) и докажите, что коэффициент подобия равен 1.

**8.** *Ответ*. Нельзя. *Указание.* Введем на листе прямоугольную систему координат с осями, проходящими по линии сетки. Назовем четностью узла четность суммы его координат. Одну из ножек циркуля будем считать первой, другую — второй. Докажите, что четности углов, в которые попадают ножки циркуля, не меняются при выполнении шагов. Если изначально четности первой и второй ножек были различны, ножки поменяться местами не могут. Если эти четности одинаковы, рассмотрите вместо исходной новую сетку, у которой ячейки в 2 раза больше, а ножки циркуля изначально расположены в ее узлах, после чего повторите уже приведенные рассуждения.

*10 класс*

**1.** *Ответ*: $b = 0,\ 0 \le a < 4$. *Указание.* Если $x_0$ — общий корень, то $f(x_0) = 0$. Отсюда следует, что $b = 0$.

**2.** *Указание.* Пусть $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\angle OBC = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а

$\angle KEA = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} C\breve{O} = = \pi - \alpha.$

Отсюда следует, что $KE \| AD$. Аналогично, $KD \| AE$, значит, $ADKE$ − параллелограмм.

**3.** *Указание.* Пусть $A$ и $B$ − любые две точки данного множества $M$, расстояние между которыми равно диаметру $d$ этого множества. Тогда из определения диаметра следует, что если $P \in M$, то $P$ лежит внутри или на границе «линзы», образованной пересечением кругов радиуса $d$ с центрами $A$ и $B$ (рис.8). Докажите, что на одной из дуг $AKC$ и $BLD$ нет точек множества $M$, т.е. что если $K \ne A$, $L \ne B$, то $KL > d$.

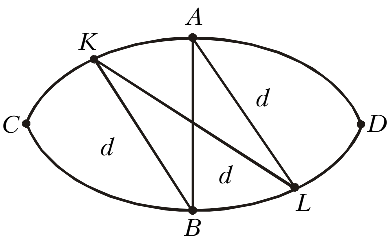


Рис. 8

Пусть, например, это дуга $AKC$. Удалим точку $A$, а оставшиеся точки разделим на 2 части прямой $AB$, присоединив точки самой прямой $AB$ к левой части.

**4.** *Ответ*: начинающий. *Указание.* Первым ходом начинающий уменьшает на единицу числа в первой и четырех последних ячейках. В дальнейшем в ответ на каждый ход второго он уменьшает на единицу числа в тех же ячейках, что и второй.

**5.** *Ответ*: $x = \frac{-3 + \sqrt{9 + 12n}}{6}$, $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Указание.* Заметим, что $0 \le x < 1$. Равенство $\{a + b\} = a$ выполняется только когда $b$ − целое число. Поэтому $3x^2 + 3x$ − целое, т.е. $3x^2 + 3x = n$, где $0 \le n < 6$.

**6.** *Ответ*: нет. *Указание.* Докажите, что хотя бы один угол пятиугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$ большие $180^\circ$.

**7.** Пусть мы убрали минимальное количество перегородок. Рассмотрим кубик, путь из которого до границы самый длинный. Одна из перегородок убрана. Вернем ее на место. Тогда из всех кубиков, кроме этого, пройти на границу все еще можно (поскольку путь из них был не длиннее, через этот кубик он не проходил). Из этого кубика на границу пройти больше нельзя, так как набор был минимальным.
С оставшимися кубиками будем проделывать ту же операцию, пока не отрежем от границы все кубики, не являющиеся пограничными. Их $(n-2)^3$, значит операцию мы проводили $(n-2)^3$ раз, и перегородок было не менее $(n-2)^3$. Этого количества удаленных перегородок достаточно: из каждого непограничного кубика нужно убрать его нижнюю грань.

**8.** *Ответ*: 11 рублей. *Указание.* Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ для $i \ge 3$. Тогда $a_{10} = 144$.
Алгоритм отгадывания задуманного числа: на каждом шаге содержащее загаданное число множество $M$, состоящее из $a_i$ чисел, нужно разбивать на множества $M_1$ из $a_{i-2}$ чисел и $M_2$ из $a_{i-1}$ чисел и задавать вопрос о принадлежности числа множеству $M_1$.

*11 класс*

**1.** *Ответ*: $36 \cdot 35 = 1260$.
Занумеруем карты сверху вниз по порядку. В верхней колоде номера от 1 до 36, в нижней − от 37 до 72. Обозначим $K_i$ ($i = 1, 2, \ldots, 36$) номер карты нижней колоды такой же, как $i$-я верхняя. Между $i$ и $K_i$ лежит $K_i - i - 1$ карта, поэтому искомая сумма $S = (K_1 - 1 - 1) + (K_2 - 2 - 1) + \ldots + (K_{36} - 36 - 1)$. Переставим слагаемые $K_1, K_2, \ldots, K_{36}$ по возрастанию − сумма не изменится. Получим $S = (37 - 1 - 1) + (38 - 2 - 1) + \ldots + (72 - 36 - 1) = 36 \cdot 35 = 1260$.

**2.** *Указание.* Докажите, что касательная к окружности $S$ в точке $C$ параллельна $DE$

**4.** *Ответ*: нельзя. *Указание.* Докажите, что в исходной таблице найдется подтаблица $2 \times 2$, в которой в трех клетках стоят нули, а в одной — единица. После этого проследите за «судьбой» этой таблицы $2 \times 2$. Пусть через несколько ходов в ней стоят числа $a$ и $b$, образующие верхнюю ее строку, а числа $c$ и $d$ — нижнюю. Докажите затем, что остаток от деления на 3 числа $D = (a + d) - (b + c)$ не меняется в результате применения разрешенных операций во всей таблице. Поскольку вначале этот остаток равен 1 или −1, числа $a$, $b$, $c$, $d$ не могут быть сделаны равными.

**5.** *Ответ*: нет. *Указание.* Докажите, что из чисел, делящихся на 7, в результате данной операции получаются числа, делящиеся на 7.

**6.** Сосчитаем стороны всех клеток, составляющих многоугольник, следующим образом: из количества сторон черных клеток вычтем количество сторон белых клеток. Эта величина равна $4(a - b)$, так как у каждой клетки четыре стороны, в то же время каждый отрезок, лежащий внутри многоугольника, был посчитан один раз со знаком «+» и один раз − со знаком «−». Таким образом, полученная величина равна сумме отрезков периметра с соответствующими знаками: «+» для черных и «−» для белых, откуда и получаем требуемое равенство.

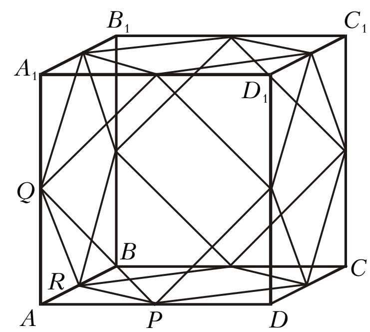


Рис. 9

**7.** *Ответ*: $5/6$. *Указание.* Докажите, что фигура $\Phi$ состоит из середин отрезков, концы которых лежат на тетраэдрах $ACB_1D_1$ и $C_1A_1DB$, «вписанных» в куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1 (рис.9). Докажите, что $\Phi = U$, и найдите объем многогранника $U$, вершины которого — середины ребер куба.

**8.** Из неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} > \frac{1}{1998}$ следует, что все члены последовательности попарно различны. Докажем, что для каждого числа $n$ количество индексов $i > n$, для которых $a_i < a_n$, меньше $1998^2$. Пусть $i > n$ и $a_i < n$. Интервал $[1, a_n]$ содержит лишь конечное число членов последовательности, значит, все $a_k$ с достаточно большими $k$ будут больше $a_n$. При возрастании индекса от $i$ до бесконечности найдется такое $j$, что $a_j < a_n < a_{j+1}$. Расстояние между $a_j$ и $a_{j+1}$ ввиду неравенства $\frac{|a_n - a_m|}{|n - m|} < 1998$ меньше 1998, поэтому либо $a_n - a_j < 999$, либо $a_{j+1} - a_n < 999$. В первом из этих случаев по условию $\frac{j - n}{1998} < a_n - a_j < 999$, значит,
$i \le j < n + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$, во втором, аналогично,
$i \le j < n - 1 + 1998 \cdot 999 < n + 2 \cdot 10^6$. Таким образом, число индексов $i > n$, для которых $a_j < a_n$, строго меньше $2 \cdot 10^6$. По условию в последовательности встречаются все натуральные числа, значит, $a_n$ равно числу членов последовательности, лежащих в интервале $[1, a_n]$. Член последовательности, лежащий в $[1, a_n]$, имеет индекс меньший $n$ или больший $n$, количество первых не более $n - 1$, количество вторых, по до-

казанному, меньше $2\cdot 10^6$. Тогда $a_n < n - 1 + 2\cdot 10^6 < n + 2\cdot 10^6$. С другой стороны, также по доказанному, если $i < n - 2\cdot 10^6$, то $a_i < a_n$, отсюда сразу следует, что $n - 2\cdot 10^6 < a_n < n + 2\cdot 10^6$, т.е. $\left|a_n - n\right| < 2\cdot 10^6$.

## Заключительный этап

### *9 класс*

**1.** Абсциссы $x_1$ и $x_2$ точек пересечения параболы и прямой $y = x$ удовлетворяют уравнению $x^2 + (p-1)x + q = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 1 - p$. Аналогично получаем, что абсциссы $x_3$ и $x_4$ точек пересечения параболы и прямой $y = 2x$ связаны соотношением $x_3 + x_4 = 2 - p$.
Если $x_1 < x_2$, а $x_3 < x_4$, то проекция левой дуги равна $x_1 - x_3$, а правой $x_4 - x_2$. Разность их равна

$$(x_4 - x_2) - (x_1 - x_3) = (x_3 + x_4) - (x_1 + x_2) = (2 - p) - (1 - p) = 1.$$

**2.** Отметим углы параллелограммов, являющиеся частью углов многоугольника. Пусть в многоугольнике $n$ сторон. Тогда сумма отмеченных углов равна $180°\cdot(n-2)$. К каждой стороне многоугольника примыкают стороной по два отмеченных угла, их сумма, очевидно, не менее 180°. Просуммировав такие пары по всем сторонам, получим не менее $180°\cdot n$, т.е. по крайней мере на 360° больше, чем при подсчете другим способом. Избыток возникает за счет того, что некоторые углы посчитаны дважды, а именно те, которые примыкают сразу к двум сторонам. Поскольку каждый такой угол меньше 180°, то таких углов не менее трех. Но вершины таких углов как раз и являются хорошими вершинами многоугольника.

**7.** *Ответ*: $\left[\dfrac{3N}{4}\right]$ звена (здесь $[x]$ – целая часть числа $x$).
Заметим, что в каждой паре звеньев, бывших соседями, но переставших ими быть, по крайней мере одно звено должно быть раскрыто. Это же верно для пары несоседних звеньев, которые должны стать соседями.
Если разбить звенья на группы так, чтобы любые два звена в группе являлись или впоследствии стали соседними (но не то и другое вместе), то из каждой такой группы может остаться нераскрытым не более одного звена. Такой группой, например, являются 4 звена, которые в старой цепочке следовали в порядке 1-2-3-4 а в новой должны быть в порядке 2-4-1-3. Другие примеры: в старой 1-2-3, в новой 1-3 (а 2 с ними не связано), или в старой 1-2, а в новой они не связаны.
Разбив мысленно цепочку на четверки, с возможным остатком в 1, 2 или 3 звена, и потребовав такой порядок, при котором четверки и остаток изменяются указанным образом, заказчица обеспечит раскрытие не менее $\left[\dfrac{3N}{4}\right]$ звеньев (лишнее звено из остатка прицепляется с другого конца).
С другой стороны, раскрыв в исходной цепочке каждое второе звено, ювелир разобьет вторую цепочку на части, где в сумме не более половины всех звеньев. В каждой части надо раскрыть не более половины звеньев, поэтому не менее четверти звеньев можно оставить нераскрытыми.

**8.** Одновременно с операциями на доске будем вести запись в тетради. Но вместо каждого числа $x$, появляющегося на доске, будем писать в тетради число $\dfrac{ab}{x}$ ($a$ и $b$ – исходные числа). Когда на доске пара чисел $(x, y)$, где $x > y$, заменяется на пару $\left(x, \dfrac{xy}{x-y}\right)$, в тетради происходит замена

$$\left(\frac{ab}{x}, \frac{ab}{y}\right) \to \left(\frac{ab}{x}, \frac{ab(x-y)}{xy}\right) = \left(\frac{ab}{x}, \frac{ab}{y} - \frac{ab}{x}\right),$$

т.е., как в алгоритме Евклида, большее число заменяется на разность. Следовательно, на каком-то шаге мы запишем в тетрадь пару чисел, равных НОД$(a, b)$. В это же время оба числа на доске станут равными $\dfrac{ab}{\text{НОД}(a,b)}$, т.е. НОК$(a,b)$.

### *10 класс*

**1.** Из условия следует, что $a > 0$. Если $y = p$ и $y = q$ – уравнения заданных прямых, то абсциссы точек $A$, $D$ и $E$ – корни $x_1 < x_2 < x_3$ уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d - p = 0$, а точек $B$, $C$ и $F$ – корни $X_1 < X_2 < X_3$ уравнения $aX^3 + bX^2 + cX + d - q = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} = X_1 + X_2 + X_3$. Отсюда $x_2 - X_2 = (X_1 - x_1) + (X_3 - x_3)$, что и требовалось доказать.

**3.** Сначала докажем, что стороны треугольника $K_aK_bK_c$ параллельны соответствующим сторонам треугольника $ABC$. Пусть $AC > AB$. Имеем $\angle POL = \angle K_aOL$ и $\angle POB = \angle ROB$ (рис.10), поэтому $\angle K_aOR = 2\angle LOB$. Угол $LOB$ внешний в треугольнике $AOB$, значит $\angle K_aOR = 2(\alpha/2 + \beta/2) = \alpha + \beta$. Аналогичными рассуждениями получаем, что $\angle K_bOR = \alpha + \beta$. Следовательно точки $K_a$ и $K_b$ симметричны относительно прямой $OR$, поэтому прямые $K_aK_b$ и $AB$ параллельны. Случай $AC < AB$ разбирается аналогично.

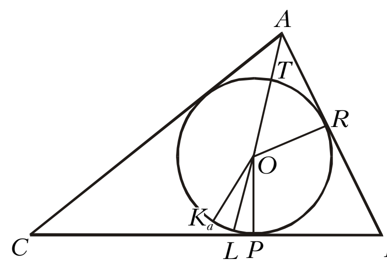

Рис. 10

Итак, соответствующие стороны треугольников $M_aM_bM_c$ и $K_aK_bK_c$ параллельны ($M_a$, $M_b$, $M_c$ – середины сторон треугольника), поэтому эти треугольники гомотетичны. Центр этой гомотетии является общей точкой прямых $M_aK_a$, $M_bK_b$ и $M_cK_c$.
Пусть прямая $M_aK_a$ пересекает вписанную в треугольник $ABC$ окружность в точке $T$. Будем считать, что $AC > AB$. Докажем, что описанная вокруг треугольника $TK_aL$ окружность проходит через основание $H$ высоты треугольника $ABC$. Для этого достаточно проверить равенство

$$M_aL\cdot M_aH = M_aP^2$$

(рис.11).
Это можно сделать, выразив длины отрезков $M_aP$, $M_aL$ и $M_aH$ через стороны треугольника $ABC$.

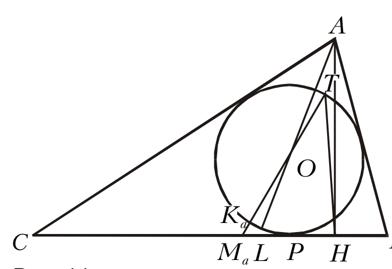

Рис. 11

Мы докажем его, пользуясь известными свойствами точки $P'$ касания со стороной $BC$ соответствующей вневписанной окружности треугольника: точка $P'$ симметрична $P$ относительно $M_a$ и отрезок $AP'$ пересекает вписанную окружность в точке, диаметрально противоположной точке $P$. Поэтому прямые $AP'$ и $M_aO$ параллельны ($O$ – центр вписанной окружности, см. рис. 12).Пользуясь параллельностью прямых $AH$ и $OP$, равенством $M_aP' = M_aP$ и теоре-

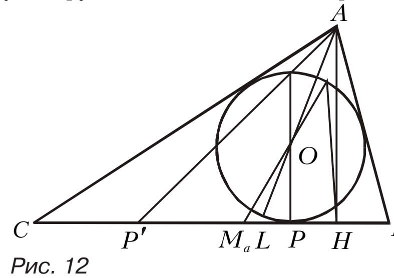

Рис. 12

мой Фалеса, получаем

$$\frac{M_aP}{M_aL} = \frac{M_aP'}{M_aL} = \frac{PH}{LP} = \frac{P'M_a + PH}{M_aL + LP} = \frac{M_aH}{M_aP}.$$

Так как четырехугольник $TK_aLH$ вписанный, углы $M_aTH$ и $M_aLK_a$ равны. Угол $M_aLK_a$ легко выражается через углы треугольника $ABC$: $\angle M_aLK_a = 180° - 2\angle ALB = \beta - \gamma$. Рассмотрим теперь четырехугольник $M_bTHM_a$. Заметим, что $\angle HCA = \angle CHM_b = \gamma$ (треугольник $CM_aH$ – равнобедренный), $\angle CM_aM_b = \beta$. Поэтому $\angle M_aM_bH = \beta - \gamma$, значит $M_aTHM_b$ – вписанный ($\angle M_aTH = \angle M_aM_bH$) и, следовательно, $\angle M_aTM_b = M_aHM_b = \gamma$.

Обозначим через $K$ точку пересечения отрезка $TM_b$ со вписанной окружностью. Так как вписанный в окружность угол $K_aTK$ равен $\gamma$, а дуга $RK_a$ вписанной окружности равна $\alpha + \beta$ (это было доказано ранее), точки $K_a$ и $K$ симметричны относительно прямой $OR$. Но точки $K_a$ и $K_b$, как отмечено ранее, также симметричны относительно этой прямой. Значит, точки $K$ и $K_b$ совпадают, что означает, что прямые $M_aK_a$ и $M_bK_b$ пересекаются в точке $T$ вписанной окружности.

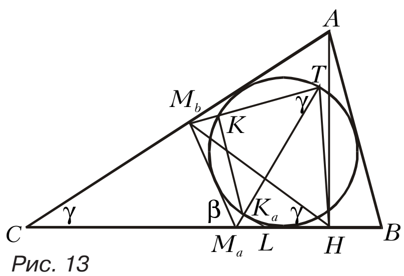

Рис. 13

**4.** Предположим противное. Тогда найдется такое $n$ ($n > 1$), что любой набор из $(n-1)$-го выделенного подмножества имеет общий элемент и существует $n$ выделенных подмножеств $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$, не имеющих общего элемента. Исключим из набора $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ множество $A_i$. Оставшиеся имеют общий элемент, который мы обозначим через $x_i$. Заметим, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Каждое из множеств $A_i$ содержит все элементы множества $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, кроме $x_i$, поэтому, если из множества $A_i$ исключить элементы множества $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, то в каждом из них останется $2k - n + 1$ элемент. Следовательно, объединение множеств $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ состоит не более чем из $n + n(2k - n + 1) = n(2k + 2 - n)$ элементов. Максимальное значение выражения $n(2k + 2 - n)$ равно $(k+1)^2$. Но тогда, по условию задачи, все $A_i$ должны иметь общий элемент. Противоречие.

**5.** *Ответ*: нельзя.

Допустим, что можно, и рассмотрим способ добиться этого за наименьшее количество действий. Пусть $a_k$, $b_k$ – числа, получавшиеся из 19 и 98 после $k$-го действия, $s$ – число действий. Тогда $a_s = b_s = m$ и $a_{s-1} \neq b_{s-1}$ (так как мы рассматриваем оптимальный способ). Действия, проведенные над $a_{s-1}$ и $b_{s-1}$ различны. Значит, $m = n^2$ и на $(s-1)$-м шаге мы имели числа $a_{s-1} = n$ и $b_{s-1} = n^2 - 1$. Общее количество $s$ действий не больше, чем $n - 18$, так как на $(s-1)$-ом шаге мы получили $n$, а каждый шаг увеличивает числа по крайней мере на 1. Тогда $n^2 - 1$ могло получиться только последовательным прибавлением единиц, так как от ближайшего квадрата $(n-1)^2$ до $n^2 - 1$ будет $2n - 2$ единицы. Следовательно, $b_1 > (n-1)^2$, и все числа $b_1$, ..., $b_{s-1}$ не являются полными квадратами. Поэтому $b_s \geq 100$, с другой стороны, $a_s = a_{s-1}^2 \geq 19^2$. Противоречие.

**6.** Переписав выражение $((x*y)*z)*t$ двумя способами, получим равенство $(x+y+z)*t = (x*y) + z + t$. Подставив в него $x = y = 0$, имеем $z*t = z + t + C$, где $C = 0*0$. Тогда $(x*y)*z = (x+y+C) + z + C = x + y + z$, откуда $C = 0$.

**7.** Будем говорить, что три вершины $n$-угольника ($n > 3$), через которые проходит описанная окружность, образуют *отмеченный треугольник*. Докажем, что все отмеченные треугольники образуют *триангуляцию* многоугольника, т.е. разбиение многоугольника непересекающимися диагоналями на треугольники. Для этого докажем следующие свойства отмеченных треугольников:

1) Никакие два отмеченных треугольника не имеют общей внутренней точки.

2) Если $ABC$ – отмеченный треугольник и $AB$ – диагональ $n$-угольника, то к $AB$ примыкает еще один отмеченный треугольник.

Далее будем называть отмеченный треугольник *граничным* (соответственно *внутренним*), если соответствующая описанная окружность граничная (внутренняя). Пусть Г – число граничных треугольников, В – число внутренних, П – число оставшихся отмеченных треугольников (назовем их *простыми*). Каждая из $n$ сторон $n$-угольника принадлежит одному из треугольников, причем граничным треугольникам принадлежат по две стороны, простым – по одной, а внутренним – ни одной. Отсюда получим соотношение

$$n = 2Г + П. \qquad (1)$$

Каждая из $(n-3)$-х диагоналей, образующих триангуляцию из отмеченных треугольников, принадлежит двум из них, причем граничным треугольникам принадлежит одна диагональ, простым – две, а внутренним – три. Отсюда вытекает равенство

$$2(n-3) = Г + 2П + 3В. \qquad (2)$$

Так как любая триангуляция состоит из $(n-2)$-х треугольников, то

$$Г + П + В = n - 2. \qquad (3)$$

Из соотношений (1), (2) и (3) легко получается требуемое равенство Г = В + 2.

**8.** *Ответ:* удачная расстановка единственна – все числа равны +1.

*11 класс*

**2.** Касательная $l_A$ в точке $A_2$ к описанной окружности параллельна $BC$. Рассмотрев касательные $l_B$, $l_C$ в точках $B_2$, $C_2$, аналогично получим $l_B \| AC$, $l_C \| AB$. Поэтому треугольник $ABC$ гомотетичен треугольнику, образованному прямыми $l_A$, $l_B$, $l_C$. При этой гомотетии $A_1$ переходит в $A_2$, $B_1$ – в $B_2$, $C_1$ – в $C_2$. Поэтому прямые $A_1A_2$, $B_1B_2$, $C_1C_2$ пересекутся в центре гомотетии.

**3.** Пусть $ABC$ – один из треугольников семейства $S$. Его высоту примем за единицу. Так как треугольники из $S$ попарно пересекаются, то они лежат в некоторой полосе ширины 2, параллельной стороне $AB$. Аналогично взяв полосы, параллельные $BC$ и $CA$, рассмотрим их пересечение – это будет шестиугольник $H$ с углами по 120° и с расстояниями между противоположными сторонами, равными 2. У такого шестиугольника длины сторон, чередуются, обозначим их $a$ и $b$ (рис.14).

Пусть вначале $a \leq b$, тогда все треугольники из $S$ содержат центр фигуры.

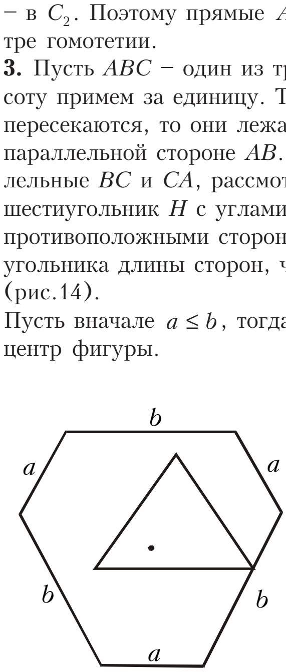

Рис. 14

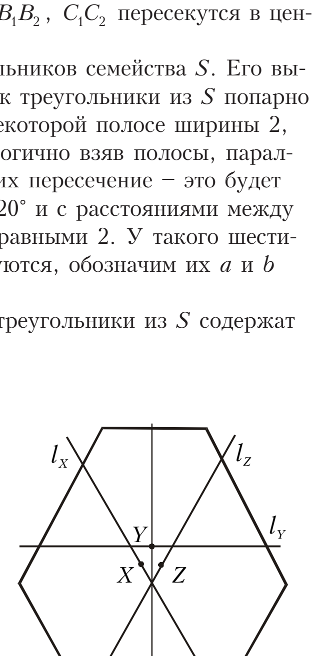

Рис. 15

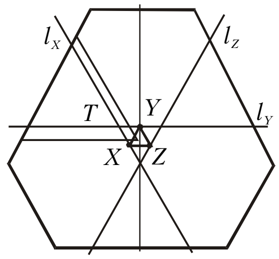


Рис. 16

Если же $a > b$, то рассмотрим прямые $l_X$, $l_Y$, $l_Z$ – параллельные сторонам шестиугольника и равноудаленные от них (рис.15). В качестве искомых точек $X$, $Y$ и $Z$ возьмем середины отрезков, высекаемых сторонами на этих прямых.

Покажем, что любой треугольник $T$, $T \in S$, содержит какую-то точку из множества $M = \{X, Y, Z\}$. Заметим, что $T$ пересекает любую из прямых $l_X$, $l_Y$ и $l_Z$, так как иначе $T$ лежит в полосе меньшей ширины, чем его высота. Предположим противное: $T$ не содержит точек $X$, $Y$ и $Z$, тогда без ограничения общности можно считать, что $T$ пересекает $l_X$ выше и левее $X$, а $l_Y$ – левее $Y$ (рис.16). Так как $T \sim \Delta XYZ$, легко видеть, что правая нижняя вершина $T$ лежит в $\Delta XYZ$, а значит, $T$ не пересекает $l_Z$ – противоречие.

**7.** Рассмотрим множество $M$ центров сфер диаметра 1, лежащих в данном тетраэдре $T$. Так как $M$ – множество точек, удаленных от всех граней $T$ не менее чем на $1/2$, то $M$ – это тетраэдр с гранями, параллельными граням тетраэдра $T$, т.е. $M$ и $T$ гомотетичны. Центры вписанных сфер обоих тетраэдров совпадают, поэтому коэффициент в гомотетии равен $\frac{r-1/2}{r}$, где $r$ – радиус сферы, вписанной в $T$.

С другой стороны, две сферы единичного диаметра не пересекаются, поэтому расстояние между их центрами не меньше 1, значит, длина одного из ребер тетраэдра $M$, содержащего эти центры, не меньше 1. Отсюда следует, что $k \ge \frac{1}{100}$ (длины ребер тетраэдра $T$ не больше 100), т.е. $1 - \frac{1}{2r} \ge \frac{1}{100}$, откуда $2r \ge \frac{100}{99} > 1{,}01$. Итак, диаметр сферы, вписанной в $T$, больше 1,01, т.е. в качестве искомой можно выбрать сферу, вписанную в $T$.

## XXXII ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ФИЗИКЕ

### Теоретический тур

*9 класс*

**1.** $F_1 = \sqrt{F^2 + 3m^2g^2r^2/R^2}$.

**2.** 1) $v_в = 0$, $v_н = 2v_0 = 12$ м/с; 2) $v_1 = v_0 - \mu g t_1 = 2$ м/с, $v_2 = 0$; 3) $l_1 = v_0t_1 - \mu g t_1^2/2 = 8$ м, $l_2 = v_0^2/(2\mu g) = 9$ м.

**3.** $\Delta p_{AB} = -\Delta p_{CD} = \rho_0\beta(t_1 - t_2)gh/2 = 0{,}63$ Па.

**4.** 1) $I_1 = 0{,}094$ А; 2) $I_1^* = 0{,}084$ А. *Указание.* В обоих случаях надо построить соответствующие вольт-амперные характеристики и найти точки их пересечения.

*10 класс*

**1.** $A = m\Delta v g\tau/2 - k^2(u\tau - s)^2/(2m)$.

**2.** $\eta_1 = (\alpha - 1)R/(2C_V) = 0{,}2$, $\eta_2 = (\alpha - 1)R/(2\alpha C_V) = 0{,}125$, где $C_V = 3R/2$ – молярная теплоемкость одноатомного идеального газа при постоянном объеме.

**3.** $\Delta m = \dfrac{k\mathrm{M}V - m(C_V + R)}{L\mathrm{M} + RT}\Delta T \approx 3 \cdot 10^{-3}$ г.

**4.** $I_1 = (\mathsf{E}_1 + \mathsf{E}_2)/(R_1 + R_2)$ и $I_2 = 0$, если $\mathsf{E}_1R_2 - \mathsf{E}_2R_1 > 0$; $I_1^* = \mathsf{E}_1/R_1$ и $I_2^* = \mathsf{E}_2/R_2 - \mathsf{E}_1/R_1$, если $\mathsf{E}_1R_2 - \mathsf{E}_2R_1 < 0$.

**5.** 1) $A_{мех} = C_0\varepsilon(\varepsilon - 1)\mathsf{E}^2/2$; 2) $\Delta W = -C_0\mathsf{E}^2(\varepsilon - 1)/2$; 3) $A_{бат} = -C_0\mathsf{E}^2(\varepsilon - 1)$; 4) $Q = C_0\mathsf{E}^2(\varepsilon - 1)^2/2$.

*11 класс*

**1.** $Q_{max} = mv_0^2/2 \approx 0{,}05$ Дж при $\mu_1 \approx 0{,}016$, $\mu_2 \approx 0{,}08$ и $\mu_3 \approx 0{,}053$ ($\mu = \dfrac{v_0}{2\pi g\sqrt{M/k}}\dfrac{1}{n}$, где $n = 1, 2, 3$).

**2.** 1) $x = h/2$; 2) $\Delta p_{AB} = -\Delta p_{CD} = \alpha(T_1 - T_2)gh/2$; 3) $P = ck\alpha(T_1 - T_2)^2 gh/2$.

**3.** $T_2 = T_0\left(1 + \dfrac{4P}{p_0S}\sqrt{\dfrac{\mathrm{M}}{3RT_0}}\right) = 354$ К; $T_1 = 2T_2 - T_0 = 408$ К; $p_2 = p_0\sqrt{T_2/T_0} = 1{,}09 \cdot 10^5$ Па; $p_1 = p_0\sqrt{T_1/T_0} = 1{,}36 \cdot 10^5$ Па.

**4.** 1) $U_0 = a_0mR/(lB) = (100 \pm 10)$ В, где $a_0$ – начальное ускорение перемычки (при $t = 0$), определяемое по графику зависимости $v$ от $t$; 2) $C = \left(\dfrac{R}{v_1}\left(\dfrac{lBU_0}{mR} - a_1\right) - \dfrac{(lB)^2}{m}\right)^{-1} = (1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$ Ф, где $v_1$ и $a_1$ – скорость и ускорение перемычки при $t \ne 0$ (определяются по графику); 3) $v_{уст} = \left(\dfrac{lBU_0}{m}\right)\left(\dfrac{(lB)^2}{m} + \dfrac{1}{C}\right)^{-1} = (14{,}3 \pm 1{,}5)$ м/с.

**5.** 1) $\lambda = 2vT = (456 \pm 4)$ нм, где $T = (0{,}113 \pm 0{,}001)$ с – период колебаний фототока, измеряемый по интерференционной картине; 2) $\Delta\lambda = \lambda T/\tau \approx 4$ нм, где $\tau \approx 12{,}9$ с – период «биений», измеряемой по интерференционной картине; 3) $I_1/I_2 = 1$.

## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

**1.** Треугольник №3 расположен зеркально по отношению к остальным. **2.** 41; 19, 14, 13, 11. **3.** 10 и 15.


# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

Д.Н.Гришукова, В.А.Иванюк, В.М.Митурич-Хлебникова, А.Е.Пацхверия, П.И.Шевелев

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №