

XXIV Всероссийская математическая олимпиада ШКОЛЬНИКОВ

Как всегда, мы публикуем материалы IV (зонального) и V (заключительного) этапов Всероссийской математической олимпиады школьников. Каждый из этапов проходил в два дня, в каждом из которых участникам предлагалось решить по четыре задачи (ниже в списках по каждому классу задачи 1–4 предлагались в первый день, а задачи 5–8 – во второй).

Задачи олимпиады

Зональный этап

8 класс

1. Существуют ли n -значные числа M и N такие, что все цифры M – четные, все цифры N – нечетные, каждая цифра от 0 до 9 встречается в десятичной записи M и N хотя бы по одному разу и M делится на N ?

Н. Агаханов

2. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N – середины сторон BC и CD соответственно. Могут ли лучи AM и AN делить угол BAD на три равные части?

Д. Кузнецов

3. В колоде 52 карты, по 13 каждой масти. Ваня вынимает из колоды по одной карте. Вынутые карты в колоду не возвращаются. Каждый раз перед тем, как вынуть карту, Ваня загадывает какую-нибудь масть. Докажите, что если Ваня каждый раз будет загадывать масть, карт которой в колоде осталось не меньше, чем карт любой другой масти, то загаданная масть совпадет с мастью вынутой карты не менее 13 раз.

И. Измestьев

4. На плоскости дано множество из $n \geq 9$ точек. Для любых 9 его точек можно выбрать две окружности так, что все эти точки окажутся на выбранных окружностях. Докажите, что все n точек лежат на двух окружностях.

В. Дольников

5. Числа от 1 до 9 разместите в кружках фигуры (рис.1) так, чтобы сумма четырех чисел, находящихся в кружках-вершинах всех квадратов (их шесть) была постоянной.

Н. Авилов

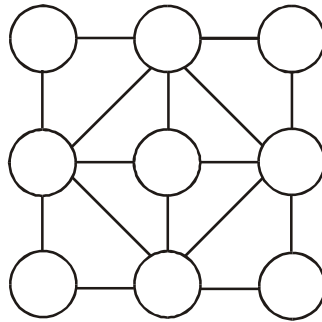


Рис. 1

6. См. задачу M1644 из «Задачника «Кванта».

7. Пусть O – центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC , S_A , S_B , S_C – окружности с центром O , касающиеся сторон BC , CA , AB соответственно. Докажите, что сумма трех углов: между касательными к S_A , проведенными из точки A , к S_B – из точки B и к S_C – из точки C , равна 180° .

М. Сонкин

8. На выборах в городскую Думу каждый избиратель, если он приходит на выборы, отдает голос за себя (если он является кандидатом) и за тех кандидатов, которые являются его друзьями. Прогноз социологической службы мэрии считается *хорошим*, если в нем правильно предсказано количество голосов, поданных хотя бы за одного из кандидатов, и *нехорошим* в противном случае. Докажите, что при любом прогнозе избиратели могут так явиться на выборы, что этот прогноз окажется *нехорошим*.

А. Разборов

9 класс

1. Длины сторон некоторого треугольника и диаметр вписанной в него ок-

ружности являются четырьмя последовательными членами арифметической прогрессии. Найдите все такие треугольники.

Я. Губин

2. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая пересекает эти окружности в точках A, B, C, D , как показано на рисунке 2. Докажите, что $\angle APB = \angle CQD$.

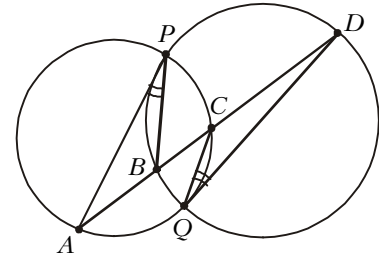


Рис. 2

3. Назовем десятизначное число интересным, если оно делится на 11111 и все его цифры различны. Сколько существует интересных чисел?

И. Рубанов, А. Вронцецкий

4. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клетки и связанная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связанной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.

И. Рубанов

5. Корни двух приведенных квадратных трехчленов – отрицательные целые числа, причем один из этих корней – общий. Могут ли значения этих трехчленов в некоторой положительной целой точке равняться 19 и 98?

И. Рубанов

6. На концах клетчатой полоски размером 1×101 клеток стоят две фишки: слева фишка первого игрока, справа – второго. За ход разрешается сдвинуть свою фишку в направлении противо-