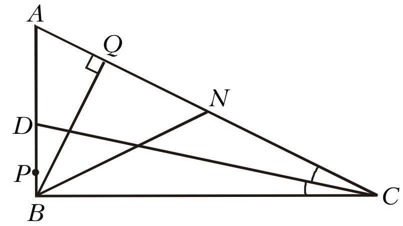

Рис.2

треугольник $A''B''C''$ такой, что $A''P'' = A''Q''$. Если возникающие при этом «перетягивании» треугольники не являются равнобедренными, то задача решена.

Приведем пример реализации этой схемы. Рассмотрим треугольник рисунка 2: $AB = 1$, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$; CD – биссектриса. Так как $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$, то $AD > \frac{1}{2}$; следовательно, $AP > \frac{1}{2}$. Далее, $\angle ABQ = \angle NBC = \frac{\pi}{6}$; значит, $AQ = \frac{1}{2}$.

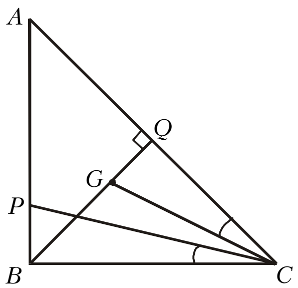

Рис.3

Рассмотрим теперь треугольник рисунка 3: $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$, $BC = 1$. Имеем: $AQ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; обозначив через G точку пересечения медиан, из подобия треугольников CQG и CBP получаем $\frac{BP}{BC} = \frac{GQ}{QC} = \frac{GQ}{BQ} = \frac{1}{3}$. Окончательно: $AP = 1 - BP = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = AQ$.

В.Сендеров

М1634. *а) На плоскость положили (с перекрытиями) несколько одинаковых салфеток, имеющих форму правильного шестиугольника, причем все салфетки получены одна из другой параллельными переносами. Всегда ли можно вбить в стол несколько гвоздей так, что все салфетки будут прибиты, причем каждая – только одним гвоздем?*

б) Тот же вопрос про правильные 5-угольники.

а) Рассмотрим паркет из шестиугольников, равных нашим салфеткам и так же ориентированных. Поскольку салфеток конечное число, можно так сдвинуть этот паркет параллельно самому себе, что ни один центр шестиугольника паркета не будет лежать на краю салфетки.

Вобьем гвозди в центры всех шестиугольников паркета. Каждая салфетка будет прибита, притом только одним гвоздем, как и требуется в задаче.

Замечание. Утверждение о том, что паркет можно сдвинуть так, чтобы ни один центр шестиугольника паркета не оказался на краю салфетки, вполне очевидно. Тем не менее, для любителей строгости докажем его. Рассмотрим все центры салфеток, которые не лежат на краях шестиугольников паркета. Обозначим их множество через M, а их число – через n.

Если M содержит не все центры салфеток, то найдется центр A салфетки, лежащий на краю. Рассмотрим такое число δ, что расстояние от любой точки множества M до границ шестиугольников паркета больше δ. (Такое δ найдется, поскольку множество M конечно.) Сдвинем паркет параллельно самому себе на расстояние меньше δ в таком направлении, чтобы точка A не лежала на границах сдвинутых шестиугольников. Все точки множества M по-прежнему не лежат на границах шестиугольников паркета, но теперь к ним присоединилась точка A. Так, точку за точкой, мы можем все центры салфеток включить в M, сдвигая паркет.

б) Нет, на плоскости можно так расположить конечное число салфеток, что всякая система гвоздей либо пробивает какую-нибудь салфетку дважды, либо какую-нибудь не пробивает вовсе (здесь и далее рассматриваются лишь такие салфетки и способы их укладки, о которых говорится в условии задачи, т.е. равные и одинаково ориентированные правильные пятиугольники).

Для определенности, пусть радиус описанной вокруг салфетки окружности равен 1. Поместим центры салфеток в точки с координатами вида $(a \cdot 10^{-n},\ b \cdot 10^{-n})$, где a и b – любые целые числа (в дальнейшем станет ясно, что нам потребуется не все бесконечное множество пар a, b, а лишь конечная его часть), n – некоторое достаточно большое натуральное число.

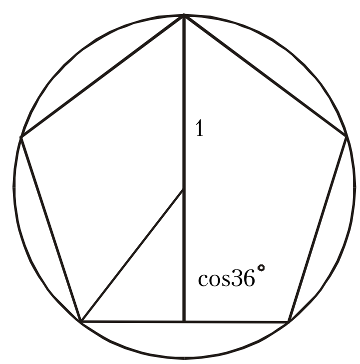

Рис.1

Предположим, что гвозди вбиты так, что каждая салфетка прибита в точности одним гвоздем. Заметим, что расстояние от вершины пятиугольника до противоположной стороны есть $1 + \cos 36°$ (рис. 1). Нетрудно убедиться, что любые две точки плоскости, расстояние между которыми не превосходит $1 + \cos 36°$, можно покрыть параллельным сдвигом пятиугольника со стороной 1.

Предположим, что расстояние между некоторыми двумя гвоздями меньше чем $1 + \cos 36°$. Эти гвозди лежат в некотором правильном пятиугольнике, стороны которого параллельны сторонам салфетки, а их длины меньше длины стороны салфетки. При достаточно большом n этот пятиугольник будет целиком покрыт некоторой салфеткой. Она окажется прибита двумя гвоздями.

Следовательно, при достаточно больших n расстояние между любыми двумя гвоздями не меньше $1 + \cos 36°$. Рассмотрим некоторый гвоздь A и круг радиусом $1 + \cos 36°$ с центром A. При достаточно большом n найдутся две салфетки, не прибитые гвоздем A, у которых только маленькие уголки высовываются за пределы круга, причем эти уголки не пересекаются друг с другом (рис.2). В эти уголки должно быть вбито по гвоздю. Расстояние между

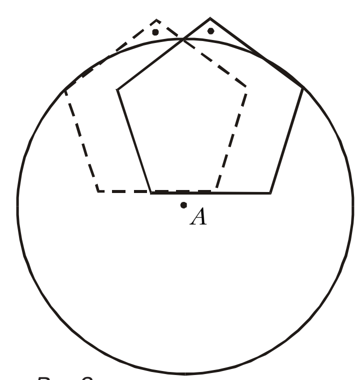

Рис.2