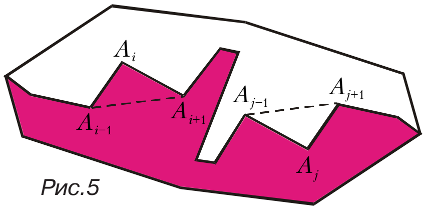

Рис.5

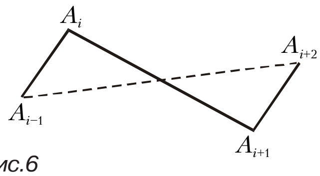

Рис.6

В случае $j = i+1$ (рис.6) заменяем ломаную $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$ на $A_{i-1}A_{i+2}$. Случай $j = i-1$ рассматривается аналогично.

С.Маркелов

М1632.[1] *Некоторые грани кубика белые, а некоторые черные. Площадь его грани равна площади клетки шахматной доски. Кубик поставили на одну из клеток и прокатили по доске так, что он побывал на каждой клетке ровно по одному разу.*

Могло ли случиться, что все время цвета клетки и соприкасающейся с ней грани совпадали?

Нет, не могло. Допустим, что существуют такая раскраска кубика и такой способ перекатывания, о которых идет речь в условии. Соединим синим цветом центры клеток доски в соответствии с тем, как перекатывался кубик. Получим ломаную длиной 63 единичных отрезка (рис. 1).

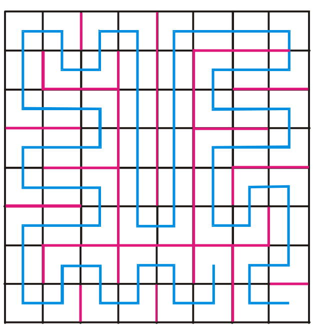
Рис.1

Рассмотрим все общие стороны соседних клеток шахматной доски (112 отрезков). Те из них, через которые кубик не перекатывался, закрасим красным цветом. Задумаемся о свойствах образовавшейся фигуры из красных отрезков.

Поскольку кубик побывал на всех клетках доски, красная фигура не разделяет доску на части. Значит, она не содержит циклов, т.е. является объединением нескольких деревьев.

Рассмотрим одно из этих деревьев. Всякое дерево, как известно, имеет хотя бы два листа (лист – это вершина, из которой выходит только один отрезок). Если бы два листа рассматриваемого дерева принадлежали границе доски, то красные отрезки делили бы доску на части. Значит, существует лист A, не лежащий на границе доски. Кубик обязан перекатиться через все три некрасных отрезка, которые выходят из точки A. Это значит, что кубик должен «обойти» точку A, как показано на рисунке 2. При этом обходе с клетками, граничащими по выходящему из точки A красному отрезку, соприкасается одна и та же грань кубика. Значит, эти клетки должны быть одного цвета, что противоречит шахматной раскраске.

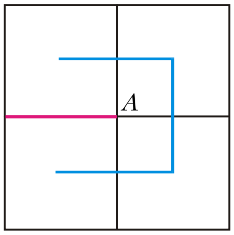

Рис.2

А.Шаповалов, А.Спивак

[1] *Автор задачи – А.Шаповалов.*

М1633. *В треугольнике ABC отрезки CM и BN – медианы, P и Q – точки соответственно на AB и AC такие, что биссектриса угла C треугольника одновременно является биссектрисой угла MCP, а биссектриса угла B – биссектрисой угла NBQ. Можно ли утверждать, что треугольник ABC равнобедренный, если а) $BP = CQ$; б) $AP = AQ$; в) $PQ \parallel BC$?*

Отрезки BQ и CP называются симедианами.

Теорема. *Пусть $AB = c$, $AC = b$, AS – симедиана. Тогда* $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$.

Доказательство. Пусть AM – медиана; обозначим $\alpha = \angle BAS = \angle CAM$, $\angle MAS = \beta$ (рис.1). Имеем: $\frac{BS}{SC} = \frac{S_{ABS}}{S_{ASC}} = \frac{c\sin\alpha}{b\sin(\alpha+\beta)}$, $1 = \frac{S_{ABM}}{S_{AMC}} = \frac{c\sin(\alpha+\beta)}{b\sin\alpha}$.

Значит, $\frac{BS}{SC} = \frac{c^2}{b^2}$.

а) Да. Перепишем равенство $BP = CQ$, пользуясь теоремой: $b^3 + ba^2 = c^3 + ca^2$. Поскольку $f(x) = x^3 + xa^2$ – монотонная функция, получаем, что $b = c$.

К этому равенству можно прийти и так: $b^3 - c^3 = a^2(c-b)$; значит, при $b \neq c$ будет $b^2 + bc + c^2 = -a^2$; но $b^2 + bc + c^2 \geq 0$.

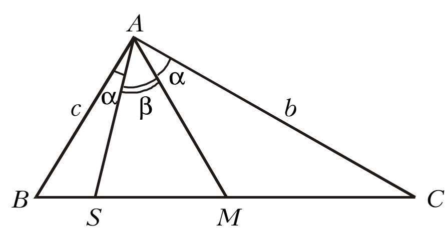

Рис.1

в) Да. $\frac{AQ}{QC} = \frac{AP}{PB}$, т.е. $\frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$.

б) Нет. $AP = c\cdot\frac{b^2}{b^2+a^2}$, $AQ = b\cdot\frac{c^2}{c^2+a^2}$. Перепишем $AP = AQ$: $bc(b-c) = a^2(b-c)$. Значит, в неравнобедренном треугольнике таком, что $a^2 = bc$, имеем $AP = AQ$.

Замечания

1. Если A – наибольший или наименьший угол треугольника, $AP = AQ$, то треугольник равнобедренный.
2. Неравнобедренный треугольник такой, что $AP = AQ$, – это треугольник со сторонами вида d, dq, dq^2, где $q \neq 1$.
3. Пункт б) (именно он предлагался на Турнире городов) можно решить и без помощи теоремы, пользуясь лишь соображениями непрерывности. Это можно сделать по такой, например, схеме.

Пусть для треугольника ABC будет $AP > AQ$, а для треугольника $A'B'C'$ пусть будет $A'P' < A'Q'$. «Перетянем» A в A', B в B', C в C'; по дороге нам встретится