Свойства правильной пирамиды, вписанной в сферу

Э.ГОТМАН

ОДНИМ из замечательных свойств правильной пирамиды является ее симметричность. Правильный тетраэдр симметричен относительно плоскости, проходящей через ребро тетраэдра и середину противоположного ребра, и значит, имеет шесть плоскостей симметрии. При симметрии относительно прямой, проходящей через середины противоположных ребер, концы этих ребер меняются местами и правильный тетраэдр переходит в себя. Следовательно, тетраэдр имеет еще три оси симметрии.

Основанием правильной пирамиды служит правильный n-угольник, который имеет n осей симметрии (рис.1).

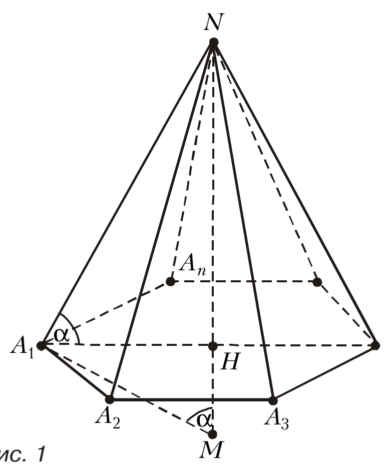

Рис. 1

Все оси пересекаются в центре многоугольника. Правильный n-угольник имеет еще и другие элементы симметрии. Каждая вершина его переходит в соседнюю при повороте вокруг центра на угол $\frac{2\pi}{n}$ и после n таких последовательных поворотов возвращается в исходное положение. Говорят, что правильный n-угольник обладает поворотной симметрией n-го порядка.

Пусть NH – высота правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$, точка H – центр ее основания. Ясно, что каждая плоскость, проходящая через прямую NH и ось симметрии правильного n-угольника, лежащего в основании пирамиды, является плоскостью симметрии пирамиды, и потому правильная n-угольная пирамида имеет n плоскостей симметрии.

При поворотах на углы $\frac{2\pi}{n}$, где $n =$ $= 1, 2, \ldots, n$, вокруг прямой NH правильная пирамида также переходит в себя и, следовательно, обладает еще поворотной симметрией порядка n. В частности, правильный тетраэдр, кроме перечисленных выше элементов симметрии, имеет четыре оси симметрии третьего порядка, каждая из которых проходит через одну из вершин и центр противоположной грани.

Правильная четырехугольная пирамида имеет четыре плоскости симметрии и ось поворотной симметрии четвертого порядка.

Как известно, около всякой правильной пирамиды можно описать сферу и в нее можно вписать сферу. При повороте пирамиды вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) точки оси, и только они, остаются на месте, вершины же основания переходят в другие вершины, а пирамида переходит в себя. В себя переходят также сферы, описанная и вписанная. Значит, их центры – неподвижные точки, лежащие на оси NH. Рассмотрим подробнее расположение центров этих сфер относительно пирамиды.

Центр описанной сферы одинаково удален от вершин основания и поэтому лежит на прямой, перпендикулярной основанию и проходящей через центр основания, т.е. на высоте NH пирамиды или на ее продолжении за точку H. Если продолжение высоты NH пересекает сферу в точке M, то MN – диаметр сферы и, следовательно, $\angle MA_1N = 90°$. Центр описанной сферы совпадает с точкой H, когда $\angle NA_1H = 45°$, он лежит на высоте пирамиды или на ее продолжении в зависимости от того, будет ли $\angle NA_1H$ меньше или больше 45°.

Введем обозначения: $MN = 2R$, $A_1A_2 = a$, $NA_1 = b$, $NH = h$, $A_1H = R_1$, $\angle NA_1H = \alpha$. Учитывая, что A_1H – высота прямоугольного треугольника A_1MN, проведенная к его гипотенузе, получим соотношения, которыми удобно пользоваться при решении задач на вычисление элементов правильной пирамиды: $b^2 = 2Rh$, $R_1^2 = (2R-h)h$, $a = 2R_1\sin\frac{\pi}{n}$, $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin a$, $R_1 = b\cos\alpha$.

Центр сферы, вписанной в правильную пирамиду, всегда лежит внутри пирамиды на ее высоте. Пусть NK – апофема правильной n-угольной пирамиды $NA_1A_2\ldots A_n$ (на рисунке 2 изображена лишь часть пирамиды). Поскольку $NK \perp A_1A_2$ и $NH \perp A_1A_2$, то ребро

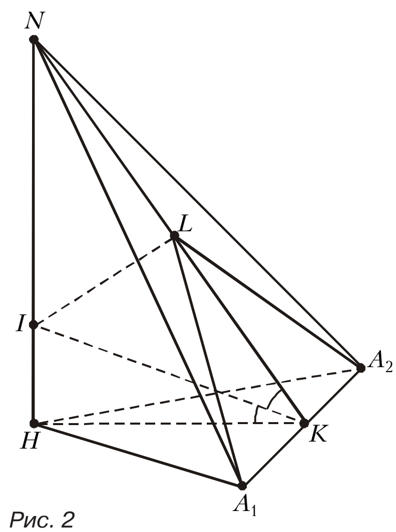

Рис. 2

A_1A_2 перпендикулярно плоскости NHK в силу теоремы о двух перпендикулярах. Проведем биссектрису угла HKN, она пересечет высоту NH в точке, которую обозначим через I. Докажем, что I – центр сферы, вписанной в пирамиду.

Проведем перпендикуляр IL к апофеме NK. Тогда $IL = IH$, и сфера радиусом IL с центром I касается основания пирамиды в точке H. Она касается также боковой грани NA_1A_2. Это следует из того, что $IL \perp A_1A_2$ и $IL \perp NK$. Значит, плоскость NA_1A_2 перпендикулярна радиусу IL и касается сферы в точке L. Поскольку при поворотах вокруг оси NH на углы $\frac{2\pi}{k}$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) грань NA_1A_2 пирамиды переходит во все другие грани, а точка I остается неподвижной, то расстояния от точки I до всех граней пирамиды одинаковы и равны IL, т.е. сфера с центром I и радиусом IH является вписанной в пирамиду. Центр I

сферы есть точка пересечения высоты NH пирамиды и биссектрисы угла NKH ($\angle NKH$ − линейный угол двугранного угла при основании пирамиды).

Введем дополнительно следующие обозначения: $IH = r$, $NK = l$, $HK = m$, $\angle HKN = \beta$ и $\angle A_1NA_2 = \gamma$. Тогда имеем: $\frac{m}{l} = \cos\beta$, $\frac{r}{h-r} = \cos\beta$ (так как KL − биссектриса угла треугольника HKN, то $\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l}$), $r = m\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $h = m\operatorname{tg}\beta$, $a = 2m\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$, $a = 2l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Пусть теперь $NA_1A_2\ldots A_n$ − правильная n-угольная пирамида, у которой центры O и I описанной и вписанной сфер совпадают. Тогда $A_1L = A_2L = NL$, как проекции равных наклонных IA_1, IA_2, IN. Значит, L − центр окружности, описанной около треугольника NA_1A_2, и поэтому $\angle A_1NA_2 = \frac{1}{2}\angle A_1LA_2$ (вписанный угол вдвое меньше центрального, опирающегося на ту же дугу). Поскольку I − центр вписанной сферы, то $IH = IL$. Значит, $KH = KL$ и $\angle A_1HA_2 = \angle A_1LA_2$ (поворотом вокруг оси A_1A_2 на угол β эти углы совмещаются). Следовательно, $\angle A_1NA_2 = \frac{\pi}{n}$. Тем самым доказано замечательное свойство пирамиды:

Теорема 1. *Если в правильной n-угольной пирамиде центры описанной и вписанной сфер совпадают, то плоский угол при вершине пирамиды равен $\frac{\pi}{n}$, т.е. сумма всех плоских углов при вершине равна π.*

Предлагаем читателю обратную теорему доказать самостоятельно.

Форма правильной n-угольной пирамиды определяется заданием одного из ее угловых элементов. Например, если известен угол α наклона бокового ребра к плоскости основания, то можно вычислить величину плоского угла γ при вершине пирамиды, или отношение высоты пирамиды к стороне основания и т.д. В таком случае говорят, что пирамида определена с точностью до подобия. Если задан один из углов и, кроме того, один линейный элемент пирамиды, то можно вычислить любые другие ее элементы. Например, если известны радиус R описанной сферы и угол α, то его высоту найдем прямым счетом: $b = 2R\sin\alpha$, $h = b\sin\alpha$, следовательно, $h = 2R\sin^2\alpha$ при любом n.

Приведем примеры более трудных задач, в которых раскрываются свойства правильной n-угольной пирамиды.

Задача 1. *Боковое ребро правильной n-угольной пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α, двугранный угол при основании равен β, плоский угол при вершине равен γ. Докажите, что*

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Пусть AB − сторона основания правильной n-угольной пирамиды, NH − высота пирамиды, LK − ее апофема (рис.3). Тогда $\angle NAH = \alpha$, $\angle NKH = \beta$, $\angle ANB = \gamma$ и $\angle AHB = \frac{2\pi}{n}$.

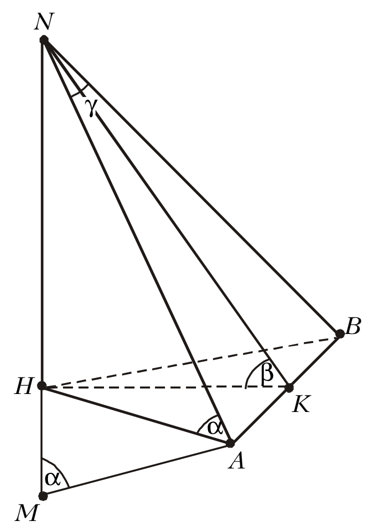

Рис. 3

Из прямоугольных треугольников ANH и ANK, имеющих общую гипотенузу $AN = b$, находим

$$AH = b\cos\alpha,\ AK = b\sin\frac{\gamma}{2}.$$

А так как $AK = AH\sin\frac{\pi}{n}$, то $\cos\alpha = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Аналогично найдем соотношение между углами β и γ. Имеем:

$$HK = l\cos\beta,\ AK = l\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$

где $l = KN$. А так как $HK = NK\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$, то $\cos\beta = = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$.

Прежде чем знакомиться с решением следующей задачи, предлагаем читателю самостоятельно решить ее для частного случая, полагая $n = 3$ или $n = 4$.

Задача 2. *Пусть r и R − радиусы вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды, h − ее высота, γ − плоский угол при вершине пирамиды. Докажите, что*

$$\frac{h}{R} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2},$$

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma + \cos\gamma - 1}{k^2},$$

где $k = \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Решение. Применим способ введения вспомогательного угла. Пусть $\angle NAH = \alpha$ (см. рис.3). Тогда

$$h = 2R\sin^2\alpha = 2R\left(1-\cos^2\alpha\right).$$

Воспользуемся результатом задачи 1:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Получим

$$h = 2R\left(1 - \frac{\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}\right).$$

Выполним несложные преобразования:

$$2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 1-\cos\gamma,$$

$$\sin^2\frac{\pi}{n} = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}\cdot\cos^2\frac{\pi}{n} = \frac{\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{1+k^2},$$

и выражение для h приводится к виду

$$h = 2R\left(1 - \frac{\left(1+k^2\right)(1-\cos\gamma)}{2k^2}\right),$$

откуда

$$\frac{h}{k} = \frac{\left(1+k^2\right)\cos\gamma + k^2 - 1}{k^2}.$$

Для доказательства второго соотношения введем вспомогательные отрезки. Обозначим $AB = 2a$, $NK = l$, $HK = m$, $NH = h$.

Из треугольников AMN и AKN находим: $b^2 = 2Rh$ и $b^2 = a^2 + l^2$. Отсюда

$$R = \frac{a^2+l^2}{2h}.$$

Так как KI − биссектриса треугольника HKN, то

$$\frac{r}{h-r} = \frac{m}{l},\ \text{откуда}\ r = \frac{hm}{l+m}.$$

Таким образом,

$$\frac{r}{R} = \frac{2h^2m}{(l+m)\left(a^2+l^2\right)}.$$

Из правой части полученного равенства исключим вспомогательные неизвестные h и m. Так как $h^2 = l^2 - m^2$ и $m = a\,\mathrm{ctg}\frac{\pi}{n}$, то после несложных преобразований получим

$$\frac{r}{R} = \frac{2(kl-a)a}{\left(a^2+l^2\right)k^2}, \text{ где } k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Числитель и знаменатель выражения, стоящего в правой части равенства, разделим на l^2. Учитывая, что $\frac{a}{l} = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, будем иметь

$$\frac{r}{R} = \frac{2\left(k-\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{\left(1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}\right)k^2}.$$

А так как $\dfrac{2\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \sin\gamma$ и $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \dfrac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$, окончательно получим

$$\frac{r}{R} = \frac{l\sin\gamma+\cos\gamma-1}{k^2}.$$

Задача 3. *Радиус сферы, описанной около правильной n-угольной пирамиды, в три раза больше радиуса вписанной сферы. Найдите величину двугранного угла при основании пирамиды.*

Решение. Воспользуемся формулой, полученной при решении задачи 2:

$$\frac{r}{R} = \frac{k\sin\gamma+\cos\gamma-1}{k^2}, \text{ где } k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

Согласно условию задачи имеем

$$3(k\sin\gamma+\cos\gamma-1) = k^2.$$

Для решения этого уравнения выразим $\sin\gamma$ и $\cos\gamma$ через $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$. Обозначим $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = x$, получим

$$\left(6+k^2\right)x^2 - 6kx + k^2 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\left(3\pm\sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

При $n = 3$ получим: $k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $x = \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, следовательно, $\gamma = 60°$ и пирамида является правильным тетраэдром.

Если $n = 4, 5, 6, \ldots$, то $k = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n} < \sqrt{3}$, и уравнение имеет два положительных корня, удовлетворяющих условию задачи:

$$\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\left(3\pm\sqrt{3-k^2}\right)k}{6+k^2}.$$

Используя соотношение задачи 1, найдем, что

$$\cos\beta = \frac{3\pm\sqrt{3-k^2}}{6+k^2}.$$

Аналогично, с использованием формул задачи 2, решается следующая задача.

Задача 4. *Найдите величину двугранного угла при основании правильной n-угольной пирамиды, у которой центры вписанной и описанной сфер симметричны относительно плоскости основания.*

Указание. Центры сфер симметричны относительно плоскости основания тогда и только тогда, когда $h + r = R$, или $\frac{h}{R} + \frac{r}{R} = 1$. Получаем уравнение

$$\left(2+k^2\right)\cos\gamma + k\sin\gamma - 2 = 0.$$

Вычислив $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, воспользуйтесь формулой задачи 1: $\cos\beta = \frac{1}{k}\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, и установите, что

$$\cos\beta = \frac{1+\sqrt{5+k^2}}{4+k^2}.$$

Задача при любом n имеет решение, так как $\sqrt{5+k^2} < 3 + k^2$.

Задача 5. *Докажите, что расстояние d между центрами вписанной и описанной сфер правильной n-угольной пирамиды выражается формулой*

$$d = R\frac{\left|\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Указание. Пусть N – вершина правильной пирамиды, I – центр вписанной сферы и O – центр описанной сферы. Тогда $NI = h - r$, $NO = R$ и $d = IO = |NO - NI| = |R + r - h|$.

Остается воспользоваться формулами задачи 2 и выполнить несложные преобразования.

Из формулы

$$d = \frac{R\left|\sin\left(\gamma-\frac{\pi}{n}\right)\right|}{\sin\frac{\pi}{n}}$$

следует, что $d = 0$ (т.е. центры вписанной и описанной сфер совпадают) тогда и только тогда, когда $\gamma = \frac{\pi}{n}$ (аналитическое доказательство теоремы 1).

Как известно, в случае тетраэдра $\frac{R}{r} \geq 3$, причем $\frac{R}{r} = 3$ тогда и только тогда, когда тетраэдр правильный.

Выясним, каково аналогичное свойство правильной пирамиды.

Воспользуемся формулой

$$\frac{R}{r} = \frac{k^2}{k\sin\gamma+\cos\gamma-1},\quad 0 < \gamma < \frac{2\pi}{n}.$$

Легко проверить истинность тождества

$$(k\sin\gamma+\cos\gamma)^2 + (k\cos\gamma-\sin\gamma)^2 = 1+k^2,$$

откуда

$$k\sin\gamma+\cos\gamma \leq \sqrt{1+k^2}.$$

Значит,

$$\frac{R}{r} \geq \frac{k^2}{\sqrt{1-k^2}-1} = 1+\sqrt{1+k^2} = 1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается только тогда, когда

$$k\cos\gamma - \sin\gamma = 0, \text{ или } \mathrm{tg}\gamma = \mathrm{tg}\frac{\pi}{n},$$

т.е. $\gamma = \frac{\pi}{n}$. Таким образом, получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть R и r – радиусы описанной и вписанной сфер правильной n-угольной пирамиды. Тогда*

$$\frac{R}{r} \geq 1+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n}},$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда центры сфер совпадают.

В заключение предлагаем еще несколько задач о правильной пирамиде, вписанной в сферу, для самостоятельного решения. Особое внимание следует обратить на выполнение чертежа. Заметим, что часто можно обойтись без изображения сферы. При решении большинства задач достаточно простроить диаметр MN описанной около пирамиды сферы и рассмотреть прямоугольный треугольник AMN, где A – любая вершина основания (см. рис.3).

Задача 6. *Центр сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, совпадает с центром основания пирамиды. Найдите отношение радиуса R этой сферы к радиусу r вписанной в пирамиду сферы.*

Указание. Пусть $NABC$ – данная правильная пирамида, NH – ее высота, NK – апофема. Радиус вписанной сферы равен радиусу окружности с центром I на высоте пирамиды, касающейся сторон угла AKN (рис.4). Так как KI – биссектриса треугольника HKN,

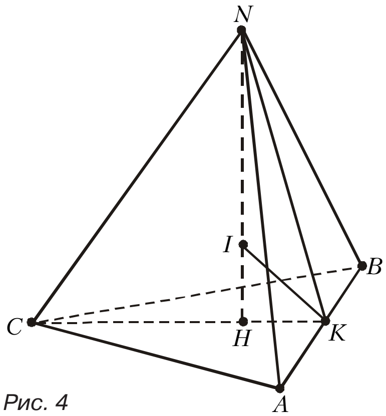

Рис. 4

то

$$\frac{R-r}{r}=\frac{KN}{KH}.$$

Ответ: $\frac{R}{r}=1+\sqrt{5}$.

Задача 7. *Отношение высоты правильной треугольной пирамиды к радиусу описанной около нее сферы равно k. Найдите величину угла δ между ее боковыми гранями. Вычислите δ при $k=\frac{2}{3}$.*

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{2}{3k}}$; при $k=\frac{2}{3}$ $\delta=90°$.

Задача 8. *Отношение радиуса сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, к стороне основания равно $\sqrt{2}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.*

Ответ: 15° и 75°.

Задача 9. *В сферу с радиусом R вписана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении γ эта площадь будет наибольшей?*

Ответ: $S_{\text{бок}}=4R^2\sin 2\gamma$. Площадь наибольшая при $\gamma=45°$.

Задача 10. *В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера. Расстояние от центра сферы до вершины пирамиды равно d, плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды. Каковы допустимые значения γ?*

Ответ: $R=\frac{d}{1+\sqrt{2}\cos(45°+\gamma)}$, $0°<\gamma<45°$.

Задача 11. *Правильная n-угольная пирамида вписана в сферу с радиусом R. Высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды. При каком значении h объем будет наибольшим?*

Указание. Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{осн}}h.$$

Если R_1 – радиус окружности, описанной около основания, то

$$S_{\text{осн}}=\frac{n}{2}R_1^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{a}{2}(2R-h)h\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Ответ: $V=\frac{n}{6}(2R-h)h^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Объем пирамиды наибольший при $h=\frac{4}{3}R$ (независимо от n).

Примечание. Наибольшее значение V можно найти без использования производной, если заметить, что сумма сомножителей произведения $(4R-2h)\cdot h\cdot h$ постоянна (равна $4R$), поэтому произведение принимает наибольшее значение при $h=4R-2h$.