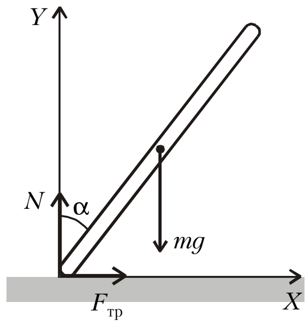

Рис. 1

силы реакции обозначим $\vec{N}$, а горизонтальную $\vec{F}_{тр}$ (рис. 1). Положительное направление для $\vec{N}$ выберем вверх, а для $\vec{F}_{тр}$ — вправо, в сторону падения. Найдя зависимости $N(\alpha)$ и $F_{тр}(\alpha)$ при всех α, мы сможем установить, при каком угле в первый раз выполнится условие проскальзывания

$$\left|F_{тр}(\alpha)\right| = \mu N(\alpha),$$

где μ — коэффициент трения.

Чтобы найти $F_{тр}$ и N, запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси X и Y:

$$F_{тр} = ma_x, \quad N - mg = ma_y.$$

При падении палочки ее центр масс движется по окружности радиусом $l/2$. Пусть в тот момент, когда палочка составляет угол α с вертикалью, ее угловая скорость равна ω, а угловое ускорение равно ε. Тогда нормальное (центростремительное) ускорение центра масс равно $a_n = \omega^2 l/2$, а тангенциальное ускорение (направленное по касательной к окружности) – $a_\tau = \varepsilon l/2$ (рис.2). Отсюда получаем проекции ускорения $\vec{a}$ на горизонтальную и вертикальную оси:

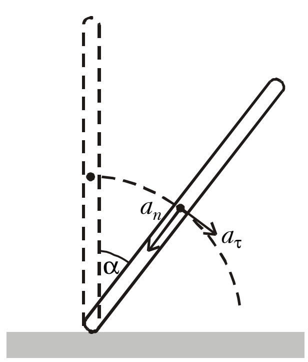

Рис. 2

$$a_x = \varepsilon \frac{l}{2}\cos\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\sin\alpha,$$

$$a_y = -\varepsilon \frac{l}{2}\sin\alpha - \omega^2 \frac{l}{2}\cos\alpha.$$

Нам осталось только определить зависимости ε и ω^2 от угла α. Для этого запишем закон динамики вращательного движения палочки:

$$mg\frac{l}{2}\sin\alpha = \frac{ml^2}{3}\varepsilon$$

и закон сохранения энергии:

$$mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{ml^2}{3}\frac{\omega^2}{2}.$$

Тогда для проекций ускорения получаем следующие выражения:

$$a_x = \frac{9}{4}g\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$a_y = \frac{9}{4}g\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2 - g,$$

откуда находим $F_{тр}$ и N:

$$F_{тр} = \frac{9}{4}mg\sin\alpha\left(\cos\alpha - \frac{2}{3}\right),$$

$$N = \frac{9}{4}mg\left(\cos\alpha - \frac{1}{3}\right)^2.$$

Проанализируем полученные выражения, считая теперь нижний конец палочки свободным. Видно, что при угле $\alpha_1 = \arccos(2/3) \approx 48°$ сила трения меняет знак. Значит, если проскальзывание начнется при угле меньшем α_1, то оно будет происходить против направления падения. Если же в интервале углов $0 < \alpha < \alpha_1$ палочка не начнет проскальзывать, то в итоге она проскользнет в сторону падения.

А почему мы так уверены, что палочка вообще начнет проскальзывать? Это следует из выражения для N: поскольку при $\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$ сила реакции обращается в ноль, то при любом коэффициенте трения условие проскальзывания $F_{тр} = \mu N$ наступит при угле меньшем α_2.

Чтобы выяснить, как зависит угол отклонения палочки в момент проскальзывания от коэффициента трения μ, надо решить уравнение

$$\mu = \frac{\left|F_{тр}\right|}{N} = \frac{\left|\sin\alpha(\cos\alpha - 2/3)\right|}{(\cos\alpha - 1/3)^2}.$$

Функция, стоящая в правой части уравнения, изображена на рисунке 3. Эта функция имеет один максимум при угле α_0, положение которого можно найти численным расчетом. Правда, если вы наберетесь терпения и возьмете производную по α, то в конце вас ждет награда: условие максимума сводится к уравнению $\cos\alpha_0 = 9/11$. Значение функции в максимуме равно $\mu_0 = 15\sqrt{10}/128 \approx 0{,}37$.

Пора делать выводы. Из рисунка 3 следует, что при $0 < \mu < \mu_0 \approx 0{,}37$ уравнение $\left|F_{тр}\right| = \mu N$ имеет три решения, из которых началу проскальзывания соответствует наименьший угол, лежащий в интервале $0 < \alpha < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \arccos(9/11) \approx 35°$. При $\mu < \mu_0$ проскальзывание происходит в сторону, противоположную падению, а при $\mu > \mu_0$ проскальзывание будет происходить в сторону падения при угле наклона, лежащем в интервале $\alpha_3 < \alpha < \alpha_2$ ($\alpha_2 = \arccos(1/3) \approx 71°$, смысл угла $\alpha_3 \approx 51°$ ясен из графика на рисунке 3).

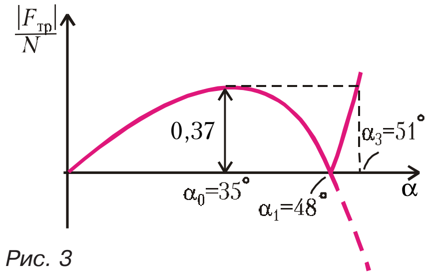

Рис. 3

Как видим, обсуждение конкретной задачи превратилось в маленькое исследование, а точное решение оказалось «богаче» поставленного вопроса: вскрылись такие черты явления, о которых мы заранее не догадывались. Что же именно мы узнали?

Во-первых, мы подтвердили начальное качественное предположение: при достаточно большом коэффициенте трения ($\mu > 0{,}37$) палочка будет проскальзывать в сторону падения (рис.4).

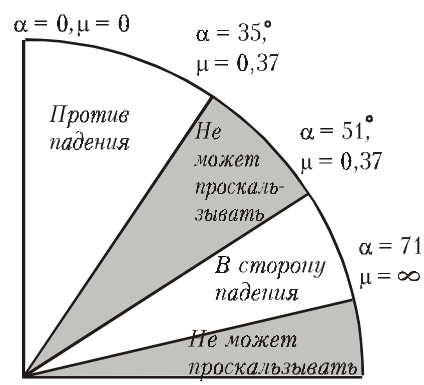

Рис. 4

Во-вторых, мы выяснили, что при любом сколь угодно большом μ проскальзывание начнется при угле отклонения, меньшем 71°. В-третьих, оказалось, что проскальзывание никогда не может начинаться в интервале углов от 35° до 51°. Согласитесь, что трудно было бы догадаться до всего этого заранее.