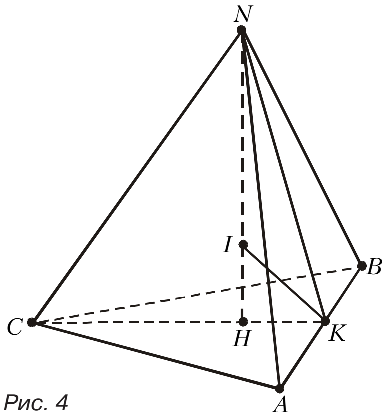

Рис. 4

то

$$\frac{R-r}{r} = \frac{KN}{KH}.$$

Ответ: $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{5}$.

Задача 7. *Отношение высоты правильной треугольной пирамиды к радиусу описанной около нее сферы равно k. Найдите величину угла δ между ее боковыми гранями. Вычислите δ при $k = \frac{2}{3}$.*

Ответ: $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{2}{3k}}$; при $k = \frac{2}{3}$ $\delta = 90°$.

Задача 8. *Отношение радиуса сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, к стороне основания равно $\sqrt{2}$. Найдите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости ее основания.*

Ответ: 15° и 75°.

Задача 9. *В сферу с радиусом R вписана правильная четырехугольная пирамида, плоский угол при вершине которой равен γ. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. При каком значении γ эта площадь будет наибольшей?*

Ответ: $S_{бок} = 4R^2 \sin 2\gamma$. Площадь наибольшая при $\gamma = 45°$.

Задача 10. *В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера. Расстояние от центра сферы до вершины пирамиды равно d, плоский угол при вершине пирамиды равен γ. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды. Каковы допустимые значения γ?*

Ответ: $R = \frac{d}{1+\sqrt{2}\cos(45°+\gamma)}$, $0° < \gamma < 45°$.

Задача 11. *Правильная n-угольная пирамида вписана в сферу с радиусом R. Высота пирамиды равна h. Найдите объем пирамиды. При каком значении h объем будет наибольшим?*

Указание. Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}S_{осн}h.$$

Если R_1 – радиус окружности, описанной около основания, то

$$S_{осн} = \frac{n}{2}R_1^2\sin\frac{2\pi}{n} = \frac{a}{2}(2R-h)h\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Ответ: $V = \frac{n}{6}(2R-h)h^2\sin\frac{2\pi}{n}$.

Объем пирамиды наибольший при $h = \frac{4}{3}R$ (независимо от n).

Примечание. Наибольшее значение V можно найти без использования производной, если заметить, что сумма сомножителей произведения $(4R-2h)\cdot h\cdot h$ постоянна (равна $4R$), поэтому произведение принимает наибольшее значение при $h = 4R - 2h$.

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Куда проскользнет палочка?

А.ЧЕРНОУЦАН

ПОСТАВИМ тонкую палочку вертикально на горизонтальную плоскость и отпустим. Палочка начнет падать, а ее нижний конец через некоторое время сдвинется с места и будет скользить по плоскости. Можно ли заранее предсказать, куда сдвинется нижний конец – в ту же сторону, куда упадет палочка, или в противоположную?

В одном случае ответ хорошо известен: если трения нет, то палочка сразу же начнет проскальзывать в сторону, противоположную падению. Объяснение очень простое – в отсутствие горизонтальных внешних сил центр масс палочки может смещаться только по вертикали.

Можно ожидать, что при малом трении направление проскальзывания будет таким же, причем начнется проскальзывание при небольшом отклонении палочки от вертикали. А вот при достаточно большом трении ответ уже не столь очевиден. Интуитивно чувствуется, что если палочка не начнет проскальзывать при небольших углах отклонения, то потом за счет приобретенной горизонтальной скорости она скорее проскользнет вперед, по движению (верхняя часть палочки «потянет» за собой нижнюю). Чтобы проверить такое предположение, проведем расчет движения палочки и найдем, при каком наклоне палочки начнется проскальзывание и куда будет в этот момент направлена сила трения (она всегда направлена против направления проскальзывания).

Для проведения расчетов нам понадобятся некоторые простые сведения из динамики твердого тела. Во-первых, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси выполняется уравнение динамики $M = I\varepsilon$, где M — момент внешних сил относительно оси вращения, ε — угловое ускорение, а I – момент инерции тела относительно оси. Это уравнение для описания вращательного движения играет такую же роль, как второй закон Ньютона – для поступательного. В случае если ось вращения проходит через конец палочки, ее момент инерции равен $I = ml^2/3$, где m – масса и l – длина палочки. Во-вторых, кинетическая энергия вращающегося твердого тела равна $I\omega^2/2$, где ω — угловая скорость вращения.

Построим решение следующим образом. Сначала будем считать, что нижний конец палочки прикреплен к плоскости шарниром, и найдем зависимость силы реакции в шарнире от угла наклона палочки α (не беспокоясь о проскальзывании или отрыве от плоскости). Вертикальную составляющую