дроби p/q выполнено неравенство $|\alpha - p/q| > C/p^n$, где C – некоторая константа, зависящая только от α. Одно из чисел, построенных Лиувиллем, имело следующий вид: $\beta = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \ldots = 0{,}11000100\ldots$, где значком $n!$ обозначено произведение натуральных чисел от 1 до n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Для числа β утверждения теоремы Лиувилля неверны: в самом деле, пусть

$$\beta_n = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \ldots + \frac{1}{10^{n!}},$$

тогда

$$\left|\beta - \beta_n\right| < \frac{2}{10^{(n+1)!}} = 2\left(\frac{1}{10^{n!}}\right)^{n+1}.$$

Значит, число β не является алгебраическим.

(Теорема Лиувилля оказалась одной из первых теорем в теории приближения иррациональных чисел рациональными (так называемой *теории диофантовых приближений*). Одним из высших результатов этой теоремы стала теорема Рота (1955), усиливающая теорему Лиувилля: если α — алгебраическое число, а ε — любое наперед заданное положительное число (например, 0,0001), то неравенство $|\alpha - p/q| < 1/q^{2+\varepsilon}$ имеет лишь конечное число решений. Таким образом, алгебраические числа приближаются рациональными значительно хуже, чем по теореме Лиувилля.)

Пользуясь рецептом Лиувилля, трансцендентные числа стали обнаруживать и другие математики. Поначалу их было мало, и эти числа воспринимались как персонаж в известной басне И.А.Крылова: «По улицам Слона водили, как видно – напоказ...» И вдруг случилось нечто поразительное. В 1878 году немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) доказал изумительный факт: каждому алгебраическому числу можно поставить в соответствие отдельное натуральное число (т.е. их можно как бы сосчитать), а вот трансцендентных чисел так много, что они даже в принципе такого подсчета не допускают. То их не могли найти, собирали по крупицам, то вдруг оказывается, что трансцендентных чисел – несчетная рать!

В 1873 году французский математик Шарль Эрмит (1822–1901) доказал трансцендентность замечательной константы $e = 2{,}71828\ldots$, служащей основанием натуральных логарифмов и представляющей предел последовательности чисел $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, когда n устремляется к бесконечности, а в 1882 году немецкий математик Карл Фердинанд Линдеман (1852–1939) доказал трансцендентность числа π. Результат Линдемана поставил точку в многовековых потугах как профессиональных ученых, так и любителей математики решить задачу *о квадратуре круга.* Эта древняя задача о построении равновеликого данному кругу квадрата с помощью одних только циркуля и линейки без делений оказалась тесно связанной с алгебраической природой числа π.

К концу XIX столетия уже была доказана гипотеза Эйлера о трансцендентности чисел вида $\log_a b$ почти для всех рациональных a и b, а Карл Вейерштрасс (1815–1897) обосновал трансцендентность чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ почти для всех алгебраических α.

Выступая в 1900 году на II Всемирном конгрессе математиков, Давид Гильберт (1862–1943) сформулировал 23 знаменитые проблемы, которые девятнадцатый век оставлял в наследство двадцатому. Одна из этих проблем касалась доказательства трансцендентности чисел вида α^β, где α – отличное от 0 и 1 алгебраическое число, а β – иррациональное алгебраическое число. Наш соотечественник Александр Осипович Гельфонд (1906–1968) разработал метод, который позволил ему решить проблему Гильберта для случая, когда β является корнем квадратного трехчлена, а позже ему и немецкому математику Теодору Шнайдеру (род. 1911) удалось решить эту проблему полностью.

Но вот о числе Эйлера $C \approx 0{,}57726\ldots$, представляющим собой предел последовательности $\left\{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right\}$, при n стремящемся к бесконечности, неизвестно даже, является ли оно иррациональным. К настоящему времени вычислено несколько тысяч десятичных знаков числа C, и никаких признаков периодичности не обнаружено. Однако еще никому не удалось доказать и иррациональность числа C. То же относится к числу $\pi + e$ и $C \cdot \pi$.

А.Жуков