а) Пусть $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Из леммы 1 следует, что $HA = 2R\cos\alpha = R$. Отсюда и из леммы 2 следует утверждение задачи.
б) Пусть $ABC$ не является правильным; тогда $O \neq H$. Пусть $A$ и $B$ лежат по разные стороны прямой $OH$, $AHIO$ не является выпуклым четырехугольником. Тогда $AH = AO = R$, т.е. $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Другое решение можно получить, опираясь на следующие формулы:

$$IO^2 = R^2 - 2Rr,$$

$$IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2.$$

Из них следует, что равенство $IO = IH$ можно переписать так:

$$p = (R + r)\sqrt{3}.$$

Остается воспользоваться такой леммой.
**Лемма 3.** Алгебраическая сумма расстояний от центра описанной около треугольника окружности до его сторон равна сумме радиусов описанной и вписанной окружностей (при этом, если центр описанной окружности лежит по ту же сторону от некоторой стороны, что и сам треугольник, то расстояние до этой стороны считается положительным, а в противном случае – отрицательным).

*А.Савин, Н.Васильев, В.Сендеров*

М1625.[1] *Плоскость разбита на единичные квадраты, вершины которых находятся в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены поочередно в черный и белый цвета (т.е. в шахматном порядке). Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в целочисленных точках, катеты которого имеют длины m и n и проходят по сторонам квадратов. Пусть $S_1$ – площадь черной части треугольника, а $S_2$ – площадь его белой части. Положим*

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

*а) Вычислите f(m, n) для всех натуральных чисел m и n, которые либо оба четны, либо оба нечетны.*
*б) Докажите, что $f(m, n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ для всех m и n.*
*в) Покажите, что не существует константы C такой, что f(m, n) < C для всех m и n.*

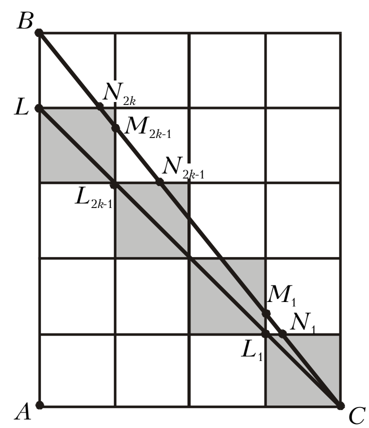
а) Обозначим рассматриваемый прямоугольный треугольник через $ABC$ ($\angle A = 90°$, $AB = m$, $AC = n$) и достроим его до прямоугольника $ABCD$. Если числа $m$ и $n$ имеют одинаковую четность, то раскраска этого прямоугольника симметрична относительно середины его диагонали $BC$. Следовательно, $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ и $S_2(ABC) = S_2(BCD)$. Значит, $f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \frac{1}{2}|S_1(ABCD) - S_2(ABCD)|$. Поэтому $f(m, n) = 0$, если $m$ и $n$ оба четны, $f(m, n) = \frac{1}{2}$, если $m$ и $n$ оба нечетны.

б) Если числа $m$ и $n$ имеют одинаковую четность, то требуемый результат немедленно вытекает из решения пункта а). Пусть теперь $m$ нечетно, а $n$ четно (в противном случае достаточно переобозначить $m$ и $n$, и наоборот). Рассмотрим на отрезке $AB$ точку $L$ такую, что $AL = m - 1$. Так как число $m - 1$ четно, то $f(m - 1, n) = 0$, т.е. $S_1(ALC) = S_2(ALC)$. Следовательно,

$$f(m,n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \le$$

$$\le \text{Площадь } LBC = \frac{n}{2} \le \frac{1}{2}\max\{m.n\}.$$

в) Вычислим $f(2k + 1, 2k)$. Как и в решении пункта б), рассмотрим на $AB$ точку $L$ такую, что $AL = 2k$, и получим аналогично, что




$$f(2k+1, 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

Площадь треугольника $LBC$ равна $k$. Без ограничения общности будем считать, что отрезок $LC$ черный (см. рисунок). Тогда белая часть треугольника $LBC$ состоит из треугольников $BLN_{2k}$, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, …, $M_1L_1N_1$, каждый из которых, очевидно, подобен треугольнику $ABC$. Их суммарная площадь равна

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}\left(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2\right) = \frac{4k+1}{12}.$$

Значит,

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12} \text{ и } f(2k+1, 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$

Ясно, что $\frac{2k-1}{6}$ принимает сколь угодно большие значения.

*И.Воронович*

М1626. *В треугольнике ABC угол A является наименьшим. Точки B и C делят окружность, описанную около этого треугольника, на две дуги. Пусть U – внутренняя точка той дуги с концами B и C, которая не содержит точку A. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что*

$$AU = TB + TC.$$

Нетрудно доказать, что если $\angle A$ – наименьший из углов $\Delta ABC$, то точка $T$ находится внутри этого треугольника. Пусть прямые $BV$ и $CW$ пересекают окружность, описанную около $\Delta ABC$, вторично в точках $B_1$ и $C_1$ соответственно (рис.1). В силу симметрии относи-

[1] *Решение задачи М1624 будет опубликовано позже.*