дующую, у которой скорость больше, и так далее. Пусть первая дорожка едет с постоянной скоростью $v_1 = 2$ м/с, человек с неподвижной земли ступает на нее перпендикулярно вектору скорости и, перестав скользить, переходит дальше – опять перпендикулярно вектору скорости. Ожидаемая нагрузка на такую дорожку (число людей, ступающих на нее с земли) составляет $N = 10$ человек в секунду, масса человека в проекте принимается равной $M = 80$ кг. С какой минимальной силой нужно тянуть дорожку в горизонтальном направлении, чтобы ее скорость оставалась постоянной? С какой силой нужно действовать на вторую дорожку, если она движется со скоростью $v_2 = 3$ м/с? Считайте, что в среднем число людей на каждой из дорожек одинаково.

Р.Простов

Ф1655. Моль гелия в процессе расширения получает тепло, его теплоемкость при этом составляет $C = 15$ Дж/(моль · К). Найдите изменение температуры гелия в этом процессе при совершении им работы $A = 20$ Дж.

М.Учителев

Ф1656. В вершинах правильного треугольника со стороной a находятся три маленьких заряженных тела. Одно из них закреплено, два других – масса каждого из них M, заряд Q – свободны. Какой заряд нужно поместить на закрепленное тело, чтобы при отпускании двух других их ускорения оказались минимальными? Чему будет равна величина этого ускорения?

А.Зильберман

Ф1657. Два одинаковых громкоговорителя подключили параллельно к выходу генератора звуковых колебаний, а очень маленький микрофон расположили в отдалении. При неизменной температуре воздуха $T = 300$ К мы проводим эксперимент – изменяем частоту генератора и наблюдаем за показаниями чувствительного вольтметра, который измеряет выходной сигнал микрофона. На частоте $f_1 = 2400$ Гц получается максимум выходного сигнала микрофона, на частоте $f_2 = 2600$ Гц – минимум, а между этими частотами уровень сигнала от микрофона монотонно убывает. Что будет наблюдаться на частоте $f_3 = 400$ Гц? При какой температуре воздуха получился бы максимум на частоте f_2? Отражения звуковых волн от стен, пола и потолка не происходит.

Р.Александров

Решения задач М1621—М1630, Ф1638—Ф1642

М1621. *а) В треугольнике заданы две стороны a и b. Какой должна быть третья сторона c, чтобы точки касания ее со вписанной и вневписанной (касающейся третьей стороны и продолжений сторон a и b) окружностями делили сторону c на три равные части? б) Существует ли прямоугольный треугольник, удовлетворяющий условиям пункта а)?*

а) Пусть $D(E)$ – точка касания с отрезком AB вписанной (вневписанной) окружности; тогда $AD = BE$. Поэтому условие задачи можно переписать так: $\frac{a+c-b}{2} = \frac{c}{3}$ (случай $\frac{2c}{3}$ мы без ограничения общности отбрасываем). Получили $c = 3b - 3a$. Если $b \ge c$ (т.е. $3a \ge 2b$), то $b < a + c = 3b - 2a$, или $b > a$ – что выполнено. Если $c > b$ (т.е. $2b > 3a$), то $c < a + b$, или $2a > b$.

Пусть теперь $b > a \ge \frac{2}{3}b$. Тогда, взяв $c = 3b - 3a$, получаем: $b \ge c$, $b < a + c$ – значит, из отрезков a, b, c треугольник построить можно. Если же $\frac{2}{3}b > a > \frac{b}{2}$, то $b > a$, $c = 3b - 3a > b$, $c < a + b$.

Итак, при $b > a > \frac{b}{2}$ надо взять $c = 3b - 3a$.

б) Да. Попытаемся решить систему

$$\begin{cases} b = a + \frac{c}{3}, \\ b^2 = a^2 + c^2. \end{cases}$$

Получим $b = \frac{5}{4}a$, $c = \frac{3}{4}a$. Действительно, треугольник со сторонами 4, 5, 3 подходит. Возможен еще один такой треугольник, его стороны $\left(\sqrt{17}-1\right)/6$, $\left(\sqrt{17}+1\right)/6$, 1.

Н.Васильев, В.Сендеров

М1622. *Пусть K – множество натуральных чисел, представимых в виде суммы различных чисел вида $2^m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots$): $K = \{1, 3, 4, 7, 8, 10, \ldots\}$. Рассмотрим отрезок натурального ряда от 1 до N. Каких чисел на этом отрезке больше – принадлежащих множеству K или остальных, если а) N = 1000; б) N – произвольное натуральное число?*

Докажем, что в любом отрезке $[1, k]$ K-чисел не меньше, чем остальных. Равенство достигается в точности тогда, когда $k = 2^n - 2$ ($n \ge 2$). Пусть утверждение верно для всех отрезков $[1, m]$, где $m \le 2^n - 2$. Тогда в любом отрезке $[2^n, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел не меньше, чем остальных. Значит, в любом отрезке $[1, m]$, где $2^n \le m \le 2^{n+1} - 3$, K-чисел больше. Так как на отрезке $[1, 2^n - 2]$ содержится $2^{n-1} - 1$ K-чисел, то на отрезке $[1, 2^{n+1} - 3]$ содержится $2\left(2^{n-1}-1\right) + 1 = 2^n - 1$ K-чисел. Но $2^{n+1} - 2$ не является K-числом. Следовательно, на отрезке $[1, 2^{n+1} - 2]$ содержится K-чисел столько же, сколько и остальных.

Б.Кукушкин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1623. *Один из углов треугольника равен 60°. Обозначим через H точку пересечения высот, через O и I – центры описанной и вписанной окружностей этого треугольника.*
а) Докажите, что OI = IH.
б) Следует ли из последнего равенства, что один из углов треугольника равен 60°?*

Мы будем пользоваться следующими легко доказываемыми утверждениями.

Лемма 1. В любом треугольнике ABC расстояние от центра описанного круга до стороны треугольника BC вдвое меньше расстояния от точки пересечения высот до вершины A.

Лемма 2. В любом треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенным в ту же вершину.