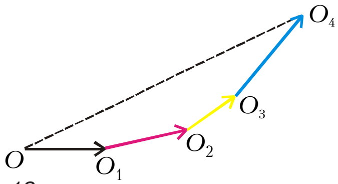

Рис. 18

выпуклую ломаную $OO_1O_2\ldots O_n$ (рис. 18). Длина ее, как уже было сказано, не меньше $100/6$.

Поскольку направления всех векторов $\vec{OO_1}$, $\vec{O_1O_2}$, …, $\vec{O_{n-1}O_n}$ заключены между направлениями векторов $\vec{OO_1}$ и $\vec{O_{n-1}O_n}$, направление суммы $\vec{OO_1} + \vec{O_1O_2} + \ldots$ $\ldots + \vec{O_{n-1}O_n} = \vec{OO_n}$ тоже заключено между этими направлениями. Следовательно, $\vec{OO_1}$, $\vec{O_1O_2}$, …, $\vec{O_{n-1}O_n}$ наклонены к вектору $\vec{OO_n}$ под углами, не превосходящими 30°. Поэтому длина OO_n не меньше $(100/6)\cdot\cos 30^\circ = 25/\sqrt{3}$.

Перенесем полосы параллельно так, чтобы концы отрезков $[OO_1]$, $[O_1O_2]$, …, $[O_{n-1}O_n]$ лежали бы на краях перпендикулярных им полос (рис. 19). Обозначим через M пересечение перпендикуляров к отрезкам $[OO_1]$ и $[O_{n-1}O_n]$,

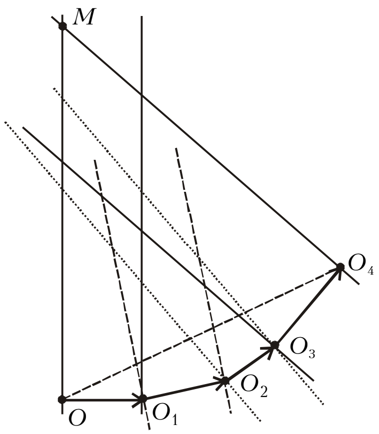

Рис. 19

восставленных в точках O и O_n соответственно.

Индукцией по числу полос легко доказать, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ полностью покрыт полосами. Поскольку величины углов MOO_n и MO_nO не меньше $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, в треугольнике MOO_n содержится правильный треугольник со стороной OO_n, в который, в свою очередь, вписан круг радиусом $OO_n/\left(2\sqrt{3}\right) =$ $= \left(25/\sqrt{3}\right)/\left(2\sqrt{3}\right) = \dfrac{25}{6} > 1$.

Замечание. Жюри не догадалось использовать индукцию для доказательства того, что многоугольник $MOO_1O_2\ldots O_n$ покрыт полосами. Предполагалось следующее рассуждение.

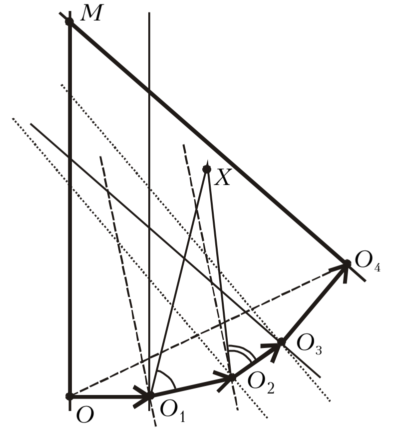

Рис. 20

Рассмотрим любую точку X многоугольника $MOO_1O_2\ldots O_n$. Если перпендикулярная отрезку $[OO_1]$ полоса не покрывает точку X, то угол XO_1O_2 острый (рис. 20). Если точку X не покрывает и полоса, перпендикулярная отрезку $[O_1O_2]$, то угол XO_2O_3 острый. Продолжая в том же духе, мы поймем, что если точка X не покрыта ни одной из первых $n-1$ полос, то все углы XO_1O_2, XO_2O_3, …, $XO_{n-1}O_n$ острые. Но тогда точка X как раз покрыта полосой, перпендикулярной отрезку $O_{n-1}O_n$!

Упражнение 18. *Из точки, расположенной внутри выпуклого многоугольника, опустили перпендикуляры на стороны или их продолжения. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров попал именно на сторону, а не на ее продолжение. (Другими словами, полосы, построенные перпендикулярно сторонам выпуклого многоугольника, покрывают его.)*

Указание. Физик сделал бы из данного многоугольника колесо, поместив в интересующую его точку грузик, и позволил бы колесу перекатываться (рис. 21).

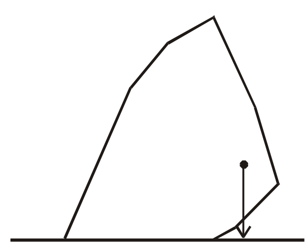
Рис. 21

Математик сделает по сути то же самое, если рассмотрит кратчайшее из расстояний от данной точки до прямых, на которых лежат стороны данного многоугольника.

Упражнение 19. *Дан выпуклый многогранник и точка внутри него. Докажите, что хотя бы один из перпендикуляров, опущенных из этой точки на плоскости граней, пересекается с соответствующей гранью, а не только с ее плоскостью.*

Замечание. Если вам все еще кажется, что утверждение задачи М1600 тривиально для «очень большой» суммарной ширины полос, обдумайте стереометрический вариант:

В пространстве даны: шар радиуса 1 и несколько «слоев»[4], сумма толщин которых равна 1000000. При любом ли расположении слоев можно каждый из них параллельно перенести так, чтобы они покрыли шар?

Эта задача – нерешенная проблема, даже если вместо 1000000 написать сколь угодно большое число.

Более точная оценка

После олимпиады было придумано простое решение задачи М1600. Позже выяснилось, что такое же решение опубликовал в 1984 году американский математик Грёмер.

Рассмотрим систему полос и выпуклую фигуру F, граница которой состоит из кривой AB и отрезков BO, OA. На рисунке 22 полоса p параллельна лучу OB, пересечение полосы q с углом AOB неограниченно, а полосы r – ограничено.

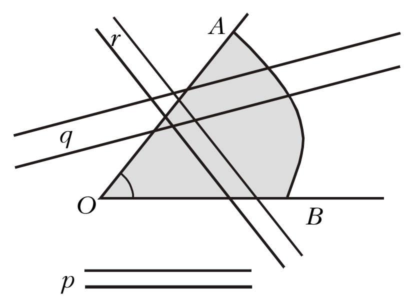

Рис. 22

Пусть в данной системе полос нет полос типа r. Другими словами, проведя через вершину O угла прямые параллельно границам полос, потребуем, чтобы все проведенные прямые имели по лучу внутри или на границе угла AOB. Докажем, что *если сумма ширин полос больше длины кривой AB, то F можно покрыть сдвигами этих полос.*

Для этого упорядочим направления полос по часовой стрелке и возьмем крайнее из них. Перенесем соответствующую полосу так, чтобы одна из ограничивающих ее прямых

[4] Слоем *мы называем здесь часть пространства, заключенную между двумя параллельными плоскостями.*