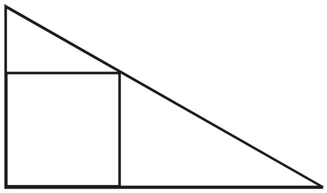

Рис. 12

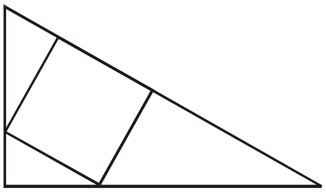

Рис. 13

упирается одним углом в прямой угол треугольника, а противоположным – в гипотенузу (рис. 12); 2) две вершины квадрата лежат на гипотенузе, а две другие – на катетах (рис. 13).

Упражнение 14. *а) Выразите длину стороны квадрата рисунка 12 через катеты a и b рассматриваемого прямоугольного треугольника.*

б) Выразите длину стороны квадрата рисунка 13 через гипотенузу c и опущенную на нее высоту h.

в) Сравните значения выражений – ответов пунктов а) и б).

Из последнего упражнения получаем ответ задачи 3: наибольший квадрат, вписанный в данный прямоугольный треугольник, изображен на рисунке 12 (одна из диагоналей этого квадрата – биссектриса прямого угла треугольника). Теперь в задаче 2 все ясно: сумма сторон квадратиков достигает наибольшего значения, когда их диагонали составляют диагональ квадрата (рис. 14).

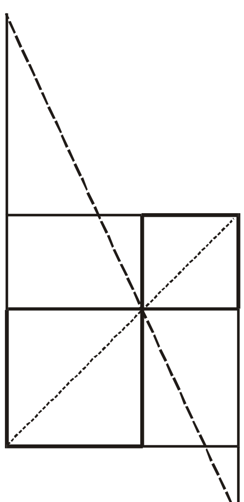

Рис. 14

Упражнение 15*. *Докажите, что если внутри правильного 2n-угольника лежат два правильных не налегающих друг на друга 2n-угольника, то сумма периметров последних не превосходит периметра объемлющего многоугольника.*

Замечание. Доказывать аналогичное утверждение для правильных многоугольников с нечетным числом сторон мы не умеем.

Упражнение 16* (М935). *Если внутри правильного 2n-угольника со стороной a и центром O поместить правильный 2n-угольник, сторона которого больше a/2, то он накроет точку O.*

Указание. Если выпуклый многоугольник не содержит точку O, то найдется такая его сторона AB, что точка O и многоугольник лежат по разные стороны от AB. Примените центральную симметрию и результат предыдущего упражнения.

Гипотеза Эрдёша

До сих пор не решена поставленная более 50 лет назад венгерским математиком Эрдёшем задача: доказать, что для любой расположенной в единичном квадрате системы не налегающих друг на друга k^2+1 квадратиков сумма их периметров не превосходит $4k$, т.е. суммы периметров k^2 одинаковых квадратиков со стороной $1/k$, на которые можно разбить единичный квадрат.

Например, при $k=3$ гипотеза Эрдёша состоит в том, что расположение 10 квадратиков рисунка 15 дает

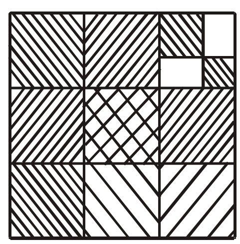

Рис. 15

наибольшую возможную сумму периметров.

Упражнение 17. *Как связана задача 2 с гипотезой Эрдёша?*

Решение задачи М1600

Наивная попытка решения М1600 могла бы состоять в следующем: сумма ширин полос настолько велика, что можно вырезать из каждой полосы по квадрату и потом покрывать такими квадратами единичный круг.

К сожалению, если полосы очень узкие, например, если дана система 1000000 полос с одинаковой шириной $1/10000$, то сумма площадей квадратиков равна

$$1000000\times(1/10000)^2=0{,}01,$$

что гораздо меньше площади единичного круга.

К дню олимпиады мы знали довольно длинное решение. Потом было придумано короткое решение, дающее более точную оценку, так что можете сразу переходить к следующему подразделу.

«Длинное» решение

Каждой полосе сопоставим перпендикулярный вектор (рис. 16), длина которого равна ширине этой полосы (какое именно из двух возможных направлений придать такому вектору, пока не существенно – следующий абзац все прояснит). Отложим векторы от одной и той же точки O (рис. 17).

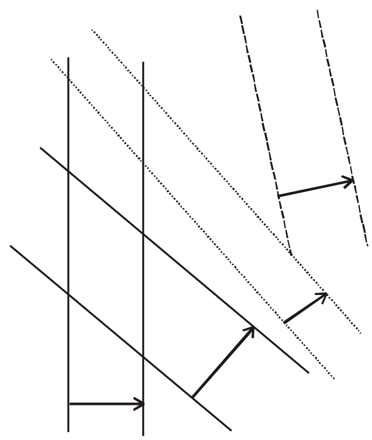

Рис. 16

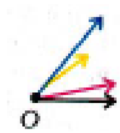

Рис. 17

Разобьем плоскость на 12 углов величиной 30° с вершиной O. Объединим каждый из этих углов в пару с вертикальным ему углом. Для каждой из полученных 6 пар вертикальных углов подсчитаем сумму длин векторов, лежащих внутри или на границе этих углов. Хотя бы одна из сумм не меньше $100/6$ – в противном случае сумма длин всех векторов была бы меньше 100.

Выберем такую пару вертикальных углов. Заменив, если потребуется, некоторые векторы на противоположные, добьемся, чтобы все они попали в один и тот же угол величиной 30°.

Теперь упорядочим векторы по направлению и, прикладывая начало каждого следующего вектора к концу предыдущего, составим из попавших в угол векторов