товой механики. Обратите внимание: если устремить постоянную Планка $\hbar$ к нулю (так обычно совершают переход от квантовых формул к классическим), то постоянная Стефана – Больцмана обратится в бесконечность. Мне показалось интересным рассказать, как переплетаются классические и квантовые формулы.

* * *

Даже если пластину заменить бесконечно протяженным слоем толщиной $2d$, точно решить задачу непросто. Но многое можно выяснить рассуждая, а не решая.

Начнем с очень тонкой пластины, такой тонкой, что можно считать температуру в слое не зависящей от координаты x. Охлаждение пластины происходит, как мы сказали, из-за излучения. Тогда

$$Cd\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\sigma T^4, \text{ причем при } t = 0 \quad T = T_0.$$

Нетрудно убедиться (тому, кто умеет интегрировать и дифференцировать), что решение этого уравнения таково:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + t/t_0}}, \text{ где } t_0 = \frac{Cd}{3\sigma T_0^3}.$$

Согласно последней формуле, пластина будет остывать бесконечно долго: только при $t \to \infty$ температура T обратится в ноль. Но, наверное, никто не удивится, если за время охлаждения $t_{охл}$ принять величину t_0. Так как известен весь режим охлаждения, то можно уточнить время охлаждения, задав вопрос, например, так: за какое время температура пластины изменится вдвое? По формуле имеем

$$t_{охл} = 7t_0$$

($t_{охл}$ в семь раз больше, чем t_0 (!) – надо быть осторожным, делая оценки).

В толстой пластине охлаждение ограничено не столько излучением, сколько теплопроводностью: тепло должно «добраться» до границы, чтобы излучиться. Поэтому $t_{охл} \sim Cd^2/$ (см. формулу (4)).

Конечно, необходимо уточнить слова «тонкая» и «толстая» пластинка (физика требует более строгого словоупотребления, чем обычная бытовая речь). Грубую оценку характерной величины $d_{хар}$, с которой надо сравнивать толщину пластины d, можно сделать, приравняв $t_{охл}$ в двух предельных случаях:

$$d_{хар} \sim \frac{}{\sigma T_0^3}.$$

Таким образом,

$$t_{охл} \sim \begin{cases} \dfrac{Cd}{3\sigma T_0^3}, \text{ если } d \ll d_{хар}, \\[2ex] \dfrac{Cd^2}{}, \text{ если } d \gg d_{хар}. \end{cases}$$

Как мы видели, коэффициент теплопроводности содержит множителем длину пробега фононов l, т.е.

$$d_{хар} \sim lA,$$

где A – безразмерный множитель, равный $C\overline{u}/(\sigma T_0^3)$. Нетрудно убедиться, что A всегда значительно превосходит единицу, поэтому характерная толщина пластины $d_{хар}$ во много раз превышает длину пробега l. Это – довольно важное замечание, так как надо было убедиться в том, что мы не вышли за пределы макроскопической физики.

Если бы мы решали прикладную задачу, то все величины, которыми оперировали, мы взяли бы из справочника для того материала, из которого сделана пластина (скажем, деталь телескопа «Хаббл») и, точно решив уравнение теплопроводности, нашли бы температурный режим изделия. Скорее всего, пришлось бы учесть освещение пластины лучами Солнца, падение на пластину микрочастиц (при столкновении выделяется тепло) и т.п. Такие расчеты не входят в нашу задачу. Отметим только, что множитель A при $T_0 \to 0$ не стремится к бесконечности. Дело в том, что при низких температурах теплоемкость C пропорциональна T_0^3 и температура вовсе выпадает из ответа.

* * *

Если у читателя эта статья пробудит или укрепит интерес к физике, объясняющей бесконечное число явлений, с которыми нас сталкивает жизнь, автор будет вполне удовлетворен.