Уравнения, которые «не решаются»

А.ЯРСКИЙ

НЕНАУЧНАЯ классификация уравнений по принципу «решается — не решается» принадлежит абитуриентам. «Нерешающимися» были названы ими уравнения (неравенства, системы), для решения которых недостаточно упрощающих запись тождественных преобразований, — нужно предложить какие-то оригинальные идеи.

Однако при внимательном рассмотрении выясняется, что «нерешающиеся» уравнения решаются по существу единообразно, а «оригинальные идеи» сводятся к одному — *изучить поведение встречающихся функций*.

Как известно, исследование функции уместно начинать с отыскания ее *области определения*. Иногда одного этого достаточно для решения задачи.

Пример 1 (МГУ, химфак, 83). *Решите неравенство*

$$\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\cdot\left(\log_5 x-1\right)+$$
$$+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\le 0 .$$

Решение. Найдем область определения неравенства:

$$x^2-4x+3\ge 0,\; 8x-2x^2-6\ge 0,\; x>0.$$

Сравнив первое и второе неравенства, получим

$$x^2-4x+3=0,$$

откуда либо $x = 0$, либо $x = 3$.

При $x = 1$ исходное неравенство выполнено. При $x = 3$ левая часть неравенства, равная $\log_5 3-2/3$, положительна, так как $\log_5 27>2$.

Тем самым $x = 3$ не удовлетворяет неравенству.

Ответ: 1.

В следующей задаче ключом к решению является анализ *областей значений* входящих в уравнение функций.

Пример 2 (МГУ, ВМК, 89). *Найдите все значения p, при которых уравнение*

$$\sqrt{(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)}+$$
$$+\log_\pi\left(\frac{\pi^2+p^2+4}{2(p-\pi)|x+2|-x^2-4x+2\pi p}\right)=0$$

имеет хотя бы одно целочисленное решение.

Решение. В левой части уравнения первое слагаемое неотрицательно. Если и второе слагаемое окажется неотрицательным, то равенство будет достигаться лишь при одновременном обращении слагаемых в нуль.

Преобразуем знаменатель стоящего под логарифмом выражения:

$$2(p-\pi)|x+2|-x^2-4x+2\pi p=$$
$$=\pi^2+p^2+4-(|x+2|-(p-\pi))^2\le$$
$$\le\pi^2+p^2+4 .$$

Следовательно, стоящее под знаком логарифма выражение не меньше единицы и сам логарифм неотрицателен, — догадка оказалась верной. Итак, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}(x+3p-3\pi-4)(|x+\pi|+p-2\pi+2)=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0.\end{cases}$$

Остается «техническая» часть решения. Полученная система распадается на две:

$$\begin{cases}x+3(p-\pi)-4=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0,\end{cases}$$
$$\begin{cases}|x+\pi|+p-2\pi+2=0,\\ |x+2|-(p-\pi)=0.\end{cases}$$

В первой системе, прибавив к первому ее уравнению утроенное второе, придем к уравнению $x+3|x+2|=4$. Это уравнение имеет единственное целочисленное решение $x = -5$. Подставив его в систему, получим $p = \pi + 3$.

Сложив уравнения второй системы, придем к соотношению

$$|x+2|+|x+\pi|=\pi-2 .$$

Это уравнение выполнено при всех $x\in[-\pi,-2]$. И так как по условию x — целое число, то $x = -3$ или $x = -2$. Поочередно подставив эти значения в систему, получим равенства $p = \pi + 1$ или $p = \pi$.

Ответ: π; $\pi+1$; $\pi+3$.

Необходимость анализа множества значений функции нередко возникает при решении тригонометрических уравнений.

Пример 3. *Решите уравнение*

$$(\sin^2 x-\sqrt{2}\sin x+1)\times$$
$$\times(\sin^4 x+\cos^4 x)=1/4 .$$

Решение. Исследуем область значений первого множителя. Положив $\sin x = y$, запишем этот множитель в виде $f(y) = y^2 - y\sqrt{2} + 1$. Графиком $f(y)$ является парабола с направленными вверх ветвями. И так как $y=\sqrt{2}/2$ — координата вершины параболы, то $f(y)\ge f(\sqrt{2}/2) = 1/2$.

Преобразуем второй сомножитель:

$$\sin^4 x+\cos^4 x=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)-2\sin^2 x\cos^2 x=$$
$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=$$
$$=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{1}{4}(3+\cos 4x)\ge 1/2 .$$

Из полученных неравенств следует, что значение $1/4$ левая часть уравнения может принять лишь тогда, когда оба сомножителя принимают свое минимальное значение $1/2$. Последнее равносильно системе

$$\sin x=\sqrt{2}/2,\quad \cos 4x=-1,$$

при решении которой затруднений уже не возникает.

Ответ: $\pi/4+2\pi n,\ 3\pi/4+2\pi k,\ n,k\in\mathbf{Z}$.

Решение следующей задачи вновь основано на тщательном исследовании областей значений фигурирующих в системе переменных.

Пример 4 (МГУ, химфак, 78). *Найдите удовлетворяющие условию $z\ge 0$ решения системы*

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^2;\\ (2z-y)(y+2)=9+4y;\\ x^2+y^2=4x.\end{cases}$$

Решение. Третье уравнение системы можно переписать в виде

$$(x-2)^2+z^2=4 .$$

Из полученного соотношения следует, что $|z|\le 2$. И так как по условию $z\ge 0$, то $0\le z\le 2$.

Выразим z из второго уравнения системы $(y\ne -2)$:

$$z=\frac{1}{2}\cdot\frac{(y+3)^2}{y+2} .$$

Решив систему неравенств

$$0\le z\le 2\Leftrightarrow 0\le\frac{(y+3)^2}{y+2}\le 4 ,$$

получим $y = -3$ или $y = -1$. Остается по найденным значениям y вычислить z и, подставив в исходную систему, найти x.

Ответ: (2; −1; 2), (4; −3; 0).

В следующей задаче необходимо, во-первых, увидеть, какую именно функцию следует ввести в рассмотрение, и, во-вторых, обнаружить такие ее свойства, как *нечетность* и *монотонность.*

Пример 5 (МГУ, химфак, 89). *Решите уравнение*

$$(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+$$

$$+\ 3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0\ .$$

Решение. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x)=x\left(2+\sqrt{x^2+3}\right).$$

При таком выборе $f(x)$ исходному уравнению можно придать вид

$$f(2x+1)+f(3x)=0\ .$$

Заметим, что $f(x)$ — нечетная функция:

$$f(-x)=(-x)\left(2+\sqrt{(-x)^2+3}\right)=-f(x)\ .$$

Замеченное свойство позволяет переписать уравнение в виде

$$f(2x+1)=-f(3x)\Leftrightarrow f(2x+1)=f(-3x)\ .$$

Далее, при $x\geq 0$ функция $f(x)$ является произведением двух возрастающих неотрицательных сомножителей x и $(2+\sqrt{x^2+3})$, что гарантирует возрастание $f(x)$ при $x\geq 0$. А в силу нечетности $f(x)$ возрастает и при $x<0$. Тем самым, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей числовой оси. Как следствие, равенство $f(2x+1)=f(-3x)$ выполняется только при условии

$$2x+1=-3x\Leftrightarrow x=-1/5\ .$$

Ответ: $-1/5$.

Монотонная функция принимает любое свое значение в одной-единственной точке. Это простое соображение нередко оказывается полезным.

Пример 6. *Решите систему*

$$\begin{cases}x-y=e^x-e^y,\\ x^2+xy+y^2=12.\end{cases}$$

Решение. Перепишем первое уравнение системы в виде

$$x+e^x=y+e^y$$

и рассмотрим функцию $f(x)=x+e^x$. Рассматриваемое уравнение можно теперь записать в виде

$$f(x)=f(y)\ .$$

Функция $f(x)$ является суммой двух возрастающих функций и, следовательно, монотонно возрастает на всей числовой оси. По этой причине последнее равенство выполняется только при условии $x=y$. Подставив $x=y$ во второе уравнение системы и решив квадратное уравнение, получим

Ответ: (2; 2), (−2; −2).

Графики *возрастающей* и *убывающей* функций могут иметь не более одной общей точки. Этот являющийся непосредственным следствием определений факт используется достаточно часто.

Пример 7. *Решите систему*

$$\begin{cases}x^4+y^4=2,\\ x^2y^2+1=2y^2.\end{cases}$$

Решение. Введем новые переменные

$$a=x^2\geq 0\ ,\quad b=y^2\geq 0\ .$$

Система примет вид

$$\begin{cases}a^2+b^2=2,\\ ab+1=2b.\end{cases}$$

На плоскости aOb нарисуем множества точек, координаты которых удовлетворяют, соответственно, первому и второму уравнениям системы. Первое уравнение описывает окружность радиусом $\sqrt{2}$ с центром в начале координат.

Второму уравнению можно придать вид $a=2-1/b$. Графиком этой функции является гипербола. При $b>0$ последнее уравнение описывает возрастающую функцию, а первое уравнение (при $a\geq 0$) — убывающую функцию $a=\sqrt{2-b^2}$. Следовательно, графики рассматриваемых функций могут иметь лишь единственную общую точку. Сама эта точка угадывается: $a=b=1$. Вернувшись к исходным переменным, получим

Ответ: (1; 1), (1; −1), (−1; −1).

Исследование функций на *монотонность* является ведущей идеей решения многих задач. Однако такое исследование может оказаться не слишком простым делом. Иллюстрацией служит

Пример 8. *Решите уравнение*

$$\log_{12}\left(\sqrt{2x}+\sqrt[4]{2x}\right)=\frac{1}{2}\log_9(2x)\ .$$

Решение. С целью избавиться от радикалов положим $\sqrt[4]{2x}=a\geq 0$. В результате такой замены уравнение примет вид

$$\log_{12}\left(a^2+a\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\log_9\left(a^4\right)\Leftrightarrow\log_{12}\left(a^2+a\right)=\log_3 a\ .$$

Последнее уравнение можно записать в виде

$$f(a)=\log_{12}a+\log_{12}(a+1)-\log_3 a=0.$$

Займемся исследованием функции $f(a)$:

$$f'(a)=\frac{1}{a\ln 12}+\frac{1}{(a+1)\ln 12}-\frac{1}{a\ln 3}=$$

$$=\frac{1}{a\ln 12}\left(1-\frac{\ln 12}{\ln 3}+\frac{a}{a+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{a\ln 12}\left(1-\log_3 4-\frac{1}{a+1}\right)<0\ .$$

Отрицательность производной означает, что функция $f(a)$ монотонно убывает на всей ее области определения $a>0$. Следовательно, $f(a)$ может обратиться в ноль лишь при одном-единственном значении a. Последнее несложно угадать: $a=3$. Вернувшись к исходной переменной, получим $x=a^4/2=81/2$.

Ответ: 81/2.

Наиболее сложной является ситуация, когда рассматриваемые функции обе возрастают или убывают. В этом случае может потребоваться подробное исследование поведения функций вплоть до построения их графиков.

Пример 9 (МГУ, мехмат, 79). *Решите неравенство*

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}\ .$$

Решение. Приведем неравенство к виду

$$\frac{3}{2x+1}>\frac{\log_2(4+2x)}{2x}\ .$$

В надежде сколько-нибудь упростить дело введем новую переменную $y=2x+1$. Неравенство примет вид

$$\frac{3}{y}>\frac{\log_2(3+y)}{y-1}\ .$$

Начнем с отыскания области определения: $y\in(-3;0)\cup(0;1)\cup(1;\infty)$

Руководствуясь идеей *метода интервалов,* рассмотрим соответствующее неравенству уравнение

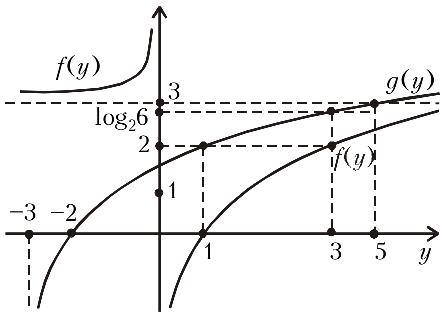
$$\frac{3}{y}=\frac{\log_2(3+y)}{y-1}\Leftrightarrow 3\left(1-\frac{1}{y}\right)=$$

$$=\log_2(3+y)\ .$$

Заметим, что при $y>0$ обе функции $f(y)$ и $g(y)$ являются *непрерывными* (что существенно для применяемого метода) и монотонно возрастающими. Построим на одном чертеже графики функций

$$f(y)=3\left(1-\frac{1}{y}\right),\quad g(y)=\log_2(3+y)$$

(см. рисунок). Правильность взаимного расположения графиков подтверждается следующей цепочкой неравенств:



при $y \in (-3; 0)$:

$$g(y) < 3 < f(y);$$

при $y \in (0; 1]$:

$$f(y) \le f(1) = 0 < \log_2 3 = g(0) < g(y);$$

при $y \in (1; 3]$:

$$f(y) \le f(3) = 2 = \log_2 4 = g(1) < g(y);$$

при $y \in (3; 5]$:

$$f(y) \le f(5) = 12/5 < \log_2 6 = g(3) < g(y);$$

при $y \in (5; \infty)$:

$$f(y) < 3 = g(5) \le g(y).$$

Из всех написанных не вполне очевидно лишь числовое неравенство

$$12/5 < \log_2 6 = \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7/5 < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^7 < 3^5 \Leftrightarrow 128 < 243.$$

Итак, соответствующее неравенству уравнение не имеет решений. Это означает, что любой из промежутков области определения может войти в ответ только целиком. Тем самым остается выбрать по точке в каждом из трех интервалов $(-3;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ \infty)$ области определения и проверить выполнение неравенства в каждой из них. Подставив, например, $y = -1$, $y = 1/2$, $y = 7$, убедимся, что неравенство выполнено лишь при $y = 1/2$ и, следовательно, только на промежутке $(0;\ 1)$.

Вернувшись к старой переменной $x = (y-1)/2$, получим

Ответ: $(-1/2;\ 0)$.

Иногда возникшие в примере 9 сложности удается обойти за счет преобразования уравнения.

Пример 10. *Решите уравнение*

$$x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}.$$

Решение. Уравнение определено при $x \ge 1/2$. При таких значениях x левая и правая части уравнения являются обе возрастающими функциями, что затрудняет исследование взаимного расположения их графиков.

Вычтем x из обеих частей уравнения:

$$x^2 - 2x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1} - x.$$

Введем в рассмотрение функции

$$f(x) = x^2 - 2x + 2,$$

$$g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x.$$

Графиком $f(x)$ является парабола с минимальным значением $f(1) = 1$. Для исследования поведения $g(x)$ вычислим

$$g'(x) = (2x-1)^{-3/4} - 1.$$

Производная $g'(x)$ обращается в ноль при $x = 1$ и при проходе через эту точку меняет знак с «+» на «−». Последнее означает, что в точке $x = 1$ функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения $g(1) = 1$. Итак, минимум левой части уравнения совпал с максимумом его правой части. Тем самым равенство возможно лишь при $x = 1$.

Ответ: 1.

В заключение попробуем ответить на естественный вопрос: как угадать, что уравнение, неравенство или система «не решается»? Рассмотренные примеры подсказывают ответ: исследование поведения функций может в любом случае оказаться существенной частью решения задачи. В процессе поиска удобной для такого исследования формы трудно пройти мимо стандартных способов решения, если, конечно, таковые существуют.

Упражнения

Решите уравнение, неравенство или систему:

1. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2} + (x-y)^2$.

2. (МГУ, химфак, 89)

$$(2x+1)\left(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}\right) + x\left(1 + \sqrt{x^2+7}\right) = 0.$$

3. (МГУ, ВМК, 89) Найдите все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы одно целочисленное решение:

$$\log_{1/\pi}\left(\frac{a^2 + 4\pi^2 + 4}{4x - x^2 - 2(a-2\pi)|x| + 4\pi a}\right) - \sqrt{(x - 5a + 10\pi - 34)(|\pi - x| - a + \pi + 2)} = 0.$$

4. (МГУ, ф-т почвоведения, 89)

$$\left(x^2 - 4x + 3\right) \times \log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2(\pi x) + \cos x + 2\sin^2\frac{x}{2}\right) \ge 2.$$

5. (МГУ, геол. ф-т, 92) Найдите все тройки чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - 2x\sin(\pi y) + 1 + \sqrt{yz - 2z^2 - 64} = (41 - yz)\left(\cos(2\pi y) + \cos(\pi z)\right)^2.$$

6. $\left(\sin^{11}x + \cos^{11}x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 1$.

7. $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

8. $2x^9 - x^5 + x > 2$.

9. $8^x(3x+1) = 4$.

10. $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

11. $1 + 2\cdot 2^x + 3\cdot 3^x < 6^x$.

12. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1; \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

13. Для $x, y \in (-\pi/2; \pi/2)$ решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = x - y, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

14. $\left(4^x + 2\right)(2 - x) = 6$.

15. $\log_5\left(1 + \sqrt{4x}\right) > \log_{16}(4x)$.

16. (МГУ, мехмат, 79)

$$\frac{2 + \log_3 x}{x - 1} < \frac{6}{2x - 1}.$$

17. (МГУ, хим. ф-т, 78) При $x \le 2$ решите систему

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3 - z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ z^2 + y^2 = 6z. \end{cases}$$

18. $\begin{cases} x^2 + 2x + \sqrt{x-y} = 0, \\ y^2 - \sqrt{x-y-1} = 4. \end{cases}$

19. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}$.

20. $2x^6 - x^5 + x - 2 \le 0$.

21. (МГУ, ф-т почвоведения, 81) Найдите все пары $(x,\ y)$, для каждой из которых выполнено равенство

$$3\sqrt{4x - x^2}\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\cos(x+y) = \frac{13}{4} + \cos^2(x+y).$$

22. (МГУ, геогр. ф-т, 81)

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

23. (МГУ, геол. ф-т, 85)

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 10 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + \sqrt{x+2}.$$

24. (МГУ, ВМК, 83)

$$\sqrt{2 - |y|}\left(5\sin^2 x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2 x + 3\sqrt[3]{33}\right) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - 5\pi^2/4.$$