Решения задач М1616 — М1620, Ф1628—Ф1637

М1616. *Дана правильная треугольная пирамида ABCD с плоскими углами α при вершине D. Плоскость, параллельная основанию, пересекает ребра DA, DB, DC в точках A_1, B_1, C_1. Поверхность многогранника $ABCA_1B_1C_1$ разрезали по пяти ребрам A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CA и AB и полученную развертку уложили на плоскость. При каких α развертка будет (частично) накрывать сама себя?*

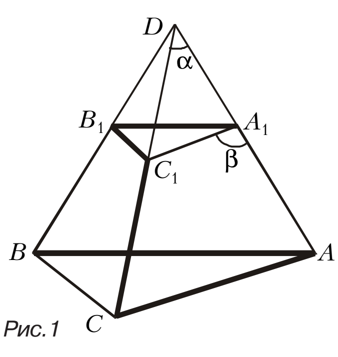


Рис.1

На рисунке 1 жирными линиями выделены ребра разреза данной развертки усеченной пирамиды. Обозначим через β угол $\angle AA_1C_1$. Ясно, что $\alpha = 2\beta - 180°$. Если угол β достаточно большой, то отрезки A_1B_1 и $B_1'C_1'$ на развертке усеченной пирамиды (рис.2) должны пересекаться. Найдем значение угла β, при котором отрезок $B_1'C_1'$ проходит через вершину B_1. $\Delta A_1B_1'B_1$ — равнобедренный, так как $A_1B_1 = A_1B_1'$. Поэтому

$$\angle B_1B_1'A_1 = \frac{1}{2}\left(180° - \angle B_1A_1B_1'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(180° - \left(360° - 60° - 2\beta\right)\right) = \beta - 60°.$$

С другой стороны, $\angle B_1B_1'A_1 = 360° - 2\beta$. Отсюда получаем $\beta = 140°$. Следовательно, $\alpha = 2\beta - 180° = 100°$.

Ответ: данная развертка усеченной треугольной пирамиды будет накрывать (частично) сама себя при любом значении $100° < \alpha < 180°$.

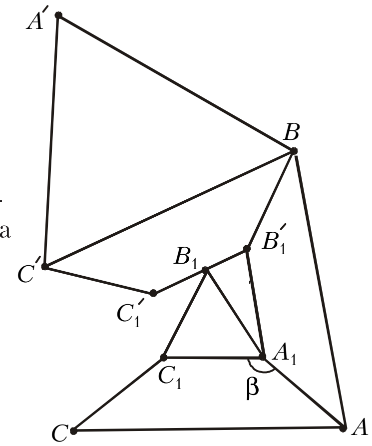


Рис.2

Замечание. До сих пор не решена следующая геометрическая проблема. Пусть дан выпуклый многогранник. У него имеется несколько различных разверток. Всегда ли среди них имеется хотя бы одна самонепересекающаяся? Ответ на этот вопрос неизвестен. Проблема относится к числу очень трудных: не зря ее называют a killer problem (проблема-убийца).

Легко убедиться в том, что у любого тетраэдра каждая развертка самонепересекающаяся. Что касается многогранников с пятью гранями, то, как видно из решения задачи, уже имеются такие, у которых не все развертки самопересекающиеся. Заметим, что рассмотренная усеченная пирамида даже при $\alpha > 100°$ имеет помимо самопересекающихся также самонепересекающиеся развертки.

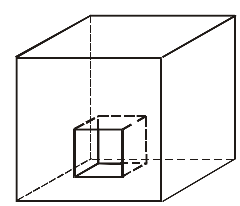


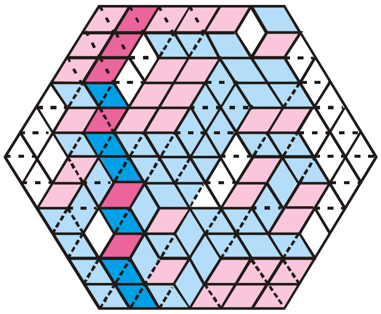
Рис.3

Вызывает удивление, что до сих пор неизвестен ни один невыпуклый многогранник (гомеоморфный сфере) с выпуклыми гранями, который бы имел лишь самопересекающиеся развертки.

Невыпуклый многогранник с невыпуклыми гранями, который допускает лишь самопересекающиеся развертки, представлен на рисунке 3.

Н.Долбилин

М1617*. *Дан правильный шестиугольник со стороной 100. Каждая его сторона разделена на 100 равных частей, и через точки деления проведены всевозможные прямые линии, параллельные сторонам шестиугольника (образующие сетку единичных правильных треугольников). Рассмотрим произвольное покрытие шестиугольника единичными ромбами, каждый из которых состоит из двух соседних треугольников сетки. Сколько существует линий сетки, разрезающих пополам (на два треугольника) а) 17 ромбов; б) k ромбов (для каждого $k \geq 1$)? (Зависит ли ответ от покрытия?)*



— она параллельна некоторой паре противоположных сторон шестиугольника (в самом деле, если эта сторона не лежит на стороне шестиугольника, к ней примыкает еще один ромб, к противоположной ей стороне этого ромба – следующий ромб и так далее, вплоть до стороны шестиугольника). Таким образом, все ромбы разделяются на три типа: стороны ромбов одного типа параллельны определенным двум из трех направлений (на рисунке ромбы трех типов раскрашены в белый, синий и красный цвета).

Пусть стороны шестиугольника содержат по n единичных отрезков – сторон ромбов (по условию задачи $n = 100$), и одна из сторон горизонтальна. Рассмотрим все ромбы тех двух типов, которые имеют горизонтальную сторону. Они образуют n дорожек, ведущих от верхней стороны шестиугольника к нижней (ведь к каждой горизонтальной стороне верхнего ряда ромбов примыкает снизу ромб с горизонтальной стороной, и так далее – вплоть до ряда из n нижних ромбов). Занумеруем горизонтальные линии сетки, проходящие через точки деления на левых и правых сторонах, по порядку сверху вниз числами 1, 2, … n (диагональ шестиугольника), $n + 1$, …, $2n - 1$. При этом k-я и $(2n - k)$-я линии ($k = 1, 2, \ldots, n$) пересекают шестиугольник по отрезку длины $n + k$. Поскольку каждая горизонтальная линия пересекает n дорожек, то k-я и $(2n - k)$-я линии разрезают ровно k «вертикальных» (на рисунке – белых) ромбов. Итак, для каждого k, $1 \le k < n$, существуют ровно две горизонтальные линии, разрезающие k ромбов (для n ромбов такая линия одна). Разумеется, точно так же обстоит дело и с линиями двух других направлений. Итак, мы получили следующий ответ: при любом разбиении шестиугольника со стороной $n = 100$ на единичные ромбы для $k = 17$ и вообще для каждого k от 1 до 99 существует ровно 6 линий, разрезающих пополам k ромбов (для $k = 100$ таких линий 3 – это диагонали шестиугольника).

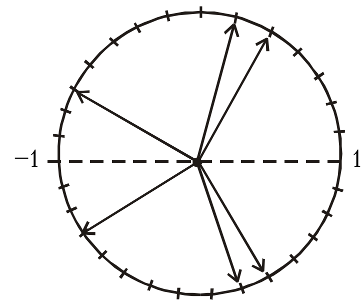
В связи с этой задачей естественно заметить, что количество ромбов каждого типа в любом разбиении также одинаково и равно n^2.

В.Алексеев, Н.Васильев

М1618*. *В вершины правильного n-угольника из его центра проведены n векторов и из них выбраны несколько (не все), сумма которых равна нулю. Докажите, что концы некоторой части выбранной совокупности векторов образуют правильный многоугольник (две симметричные относительно центра точки считаются правильным «двуугольником»), если а) n = 6; б) n = 8; в) n = 9; г) n = 12. д) Будет ли аналогичное утверждение верным при любом n?*

Ответ на общий вопрос д) отрицательный. Приведем пример для $n = 30$, т.е. укажем «неправильную» систему векторов, ведущих из центра $O = (0; 0)$ в некоторые вершины тридцатиугольника, сумма которых равна нулю, среди которых нет k векторов, ведущих в вершины правильного k-угольника при $k = 2$, 3 и 5 (а тем самым и при любом k, не превосходящем 30).

Пусть $A(1; 0)$ – одна из вершин тридцатиугольника, тогда $B(-1; 0)$ – противоположная вершина. Направим векторы в вершины правильного пятиугольника, одна из которых A, и в вершины правильного треугольника, одна из которых B, а затем удалим векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ (они дают в сумме нуль). Оставшиеся шесть векторов (см. рисунок) составляют нужную систему.



Разумеется, здесь (и ниже) мы используем тот факт, что сумма k векторов, ведущих в вершины правильного k-угольника из его центра, равна нулю; это следует, например, из того, что сумма не меняется при повороте всей картины вокруг центра на угол $2\pi/k$. Заметим, что для проекций векторов, один из которых имеет координаты (0; 1), этот факт по существу эквивалентен тождеству

$$1 + \cos\frac{2\pi}{k} + \cos\frac{4\pi}{k} + \ldots + \cos\frac{2(k-1)\pi}{k} = 0$$

(для четного k оно очевидно, для любого k легко доказывается после умножения на $\sin\frac{\pi}{k}$). Аналогично, в примере на рисунке можно провести доказательство прямым подсчетом: чтобы убедиться, что сумма векторов равна нулю, нужно проверить тождество $\cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ (здесь удобно домножить левую часть на $\sin\frac{\pi}{5}$).

Перейдем теперь к отрицательным результатам а) – г), показывающим, что для малых n такой пример не построить. Сформулируем простую лемму. Пусть $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$ — различные единичные векторы. Тогда:

1) если $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$, то A, B, C – вершины правильного треугольника;

2) если $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$, то векторы разбиваются на две пары взаимно противоположных (т.е. A, B, C, D являются вершинами прямоугольника).

Докажем 2). Пусть точки A, B, C, D лежат на окружности в указанном порядке. Тогда из равенства $\left(\vec{OA} + \vec{OB}\right)/2 + \left(\vec{OC} + \vec{OD}\right)/2 = \vec{0}$ следует, что середины хорд AB и CD равноудалены от O, откуда $AB = CD$; аналогично, $BC = DA$, так что $ABCD$ – вписанный параллелограмм, т.е. прямоугольник. Доказательство 1) еще проще: из равенств вида $\left(\vec{OB} + \vec{OC}\right)/2 =$

$= -\vec{OA}/2$ ясно, что середины хорд BC, CA и AB равноудалены от точки O. Значит, $BC = CA = AB$.

При $n \le 9$ в системе векторов, о которой идет речь в задаче, либо в дополняющей ее до n системе не более четырех векторов. По лемме, эту систему можно разбить на правильные k-угольники ($k = 2$ или $k = 3$). Значит, этим же свойством обладает и дополнительная система вершин.

Тем самым, пункты а) – в) задачи решены.

В пункте г) можно рассуждать так. Пусть система содержит вектор (1; 0) и не содержит противоположный вектор (–1; 0). Докажем, что тогда она содержит и векторы $\left(\cos\frac{2\pi}{3};\ \pm\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

В самом деле, среди наших 10 векторов (не считая (1; 0) и противоположного) три пары дают в проекции на ось Ox рациональные числа

$$\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2},\ \cos\left(\pm\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2},\ \cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

две другие пары – иррациональные числа; ясно, что получить в сумме из этих чисел нужную минус единицу можно, лишь используя две $(-1/2)$.

Используя результаты статьи «Многочлены деления круга» («Квант» №1, 1998), нетрудно доказать, что при $n = p$ и $n = 2p$, где p – простое число, нетривиальных систем векторов с суммой нуль не существует, а при любом n, имеющем не менее трех разных простых множителей, такая система существует.

Один из способов построения нужных примеров – использование корней многочленов деления круга с коэффициентами +1 и –1; например, равенство многочлена $\Phi_{15}(\xi) = 0$, где ξ — один из корней Φ_{15}, дает пример «неправильной семерки» векторов. Оно же позволяет получить такую же шестерку векторов, как на рисунке.

Однако остается немало вопросов, связанных с этой задачей.

Например, существует ли пример для $n = 15$ (из сказанного выше следует, что для $n < 15$ его нет), для n вида p^α и $p^\alpha q^\beta$, где p и q простые? Существует ли для некоторого n неправильная система из 5 векторов, идущих в вершины правильного n-угольника, с суммой нуль (не содержащая меньших правильных подсистем)? Возможна ли система, которую, в отличие от построенных выше примеров, нельзя получить не только как «сумму», но и как «алгебраическую сумму» (т. е. «сложением» и «вычитанием») правильных подсистем?

Н.Васильев, В.Сендеров

М1619*. *Числа x, y, z удовлетворяют условиям*

$$x^2 + xy + y^2 = 3,\ y^2 + yz + z^2 = 16.$$

Найдите наибольшее возможное значение величины xy + yz + zx.

Ответ: 8.

Самое короткое решение задачи основано на следующей геометрической интерпретации. Заметим, что $x^2 + xy + y^2$ равно квадрату длины третьей стороны треугольника, две стороны которого равны x, y, а угол между ними равен 120°; аналогично можно истолковать и формулу $y^2 + yz + z^2$.

Проведем три оси OX, OY, OZ на плоскости с общим началом O и одинаковым масштабом, составляющие друг с другом угол 120°. Выберем на них соответственно по точке $A(x)$, $B(y)$, $C(z)$ (рис.1). Для того чтобы выполнялись заданные в условии равенства, необходимо и достаточно, чтобы стороны AB и BC треугольника ABC равнялись соответственно $\sqrt{3}$ и 4 (если координаты точек на соседних осях, скажем, x и y, имеют разные знаки, угол AOB будет равен не 120°, а 60°). Величина

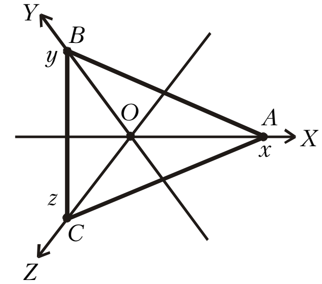


Рис.1

$$S = \frac{1}{2}|xy + yz + zx|\sin 120^\circ = |xy + yz + zx|\frac{\sqrt{3}}{4}$$

равна площади треугольника ABC. Эта площадь не превосходит $AB \cdot BC/2 = 2\sqrt{3}$, поэтому наибольшее значение $xy + yz + zx$ не превосходит 8. Это значение достигается, когда угол ABC – прямой; ясно, что внутри прямоугольного треугольника с катетами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$ можно построить точку T, для которой $\angle ATB = \angle BTC = \angle CTA = 120^\circ$ (рис.2). Эта точка T будет играть роль начала координат O, и для расстояний $x = AT$, $y = BT$, $z = CT$ достигается равенство $xy + yz + zx = 8$.

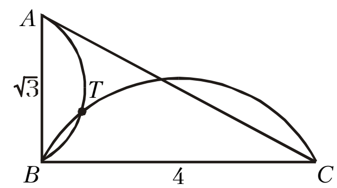


Рис.2

Заметим, что в этом решении используется на самом деле лишь то, что площадь S треугольника ABC не больше $|xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$ (а это очевидно, поскольку S не больше суммы площадей AOB, BOC, COA). Тот факт, что всегда выполнено равенство $S = |xy + yz + zx|\sqrt{3}/4$, можно доказать, рассмотрев различные случаи расположения точек A, B, C на осях OX, OY, OZ (рис.3).

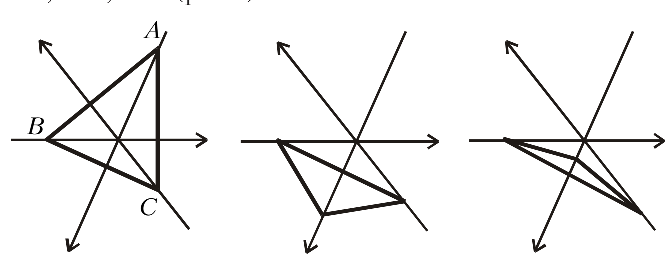


Рис.3

Можно придти к решению и чисто аналитическим путем. Дополним нашу систему условий (напишем ее в самом общем виде) еще одним:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = a^2, \\ y^2 + yz + z^2 = b^2, \\ z^2 + zx + x^2 = c^2. \end{cases}$$

Ниже мы считаем a, b, c положительными числами, среди которых хотя бы два различны.

Обозначим $t = x + y + z$, $s = xy + yz + zx$. Вычитая одно из равенств из двух других, получаем уравнения, выражающие x, y, z через t, вида $(3z-t)t = b^2 + c^2 - 2a^2$. С другой стороны, можно показать, что

$$s = \frac{2}{3}t^2 - \frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right),$$

и, подставив выражения x, y, z через t в одно из исходных уравнений, получить

$$s^2 = 3/4\,(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(c+a-b). \quad (*)$$

(Теперь нетрудно видеть, что исходная система имеет решение x, y, z тогда и только тогда, когда a, b, c – стороны треугольника, быть может, вырожденного – ср. с задачей М1090.) Мы должны найти максимальное значение s^2 как функции c. Поскольку правая часть (*) – квадратный трехчлен от c^2, решение можно завершить, в частности для $a = 4$ и $b = \sqrt{3}$, алгебраически. Впрочем, из формулы (*) видно, что s с точностью до коэффициента совпадает с выражением площади по «формуле Герона», и возникает естественная геометрическая интерпретация, о которой шла речь выше.

Из наших выкладок можно извлечь и значения x, y, z, при которых достигается максимум s:

$$(x,y,z) = \pm\left(7/\sqrt{31},\, 4/\sqrt{31},\, 20/\sqrt{31}\right).$$

Отметим, в заключение, выражение для суммы расстояний $t = AT + BT + CT$ от «точки Торричелли» до вершин треугольника A, B, C, которое фигурировало как промежуточный результат:

$$2t^2 = a^2+b^2+c^2 + \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}.$$

(Для треугольника с углами не больше 120° точка T замечательна тем, что именно для нее сумма расстояний до вершин – наименьшая.)

М.Волчкевич, В.Сендеров

М1620*. *Через точку O плоскости проведено n прямых, делящих плоскость на $2n$ углов. В каждый из них вписана окружность, касающаяся сторон на расстоянии 1 от точки O. Лучи занумерованы по порядку, начиная с луча OA_1 (рис. 1). Для произвольно выбранной на луче OA_1 точки M_1 строится ломаная $M_1M_2M_3\ldots M_{2n}M_{2n+1}$, вершина M_i которой лежит на OA_i ($i = 1, 2, \ldots, 2n$), вершина M_{2n+1} — снова на OA_1, а звено M_iM_{i+1} касается окружности, лежащей в угле A_iOA_{i+1}. Докажите а) для $n = 3$; б) для любого n, что если для некоторой точки M_1 ломаная оказалась замкнутой ($M_{2n+1} = M_1$), то она получится замкнутой при любом выборе точки M_1.*

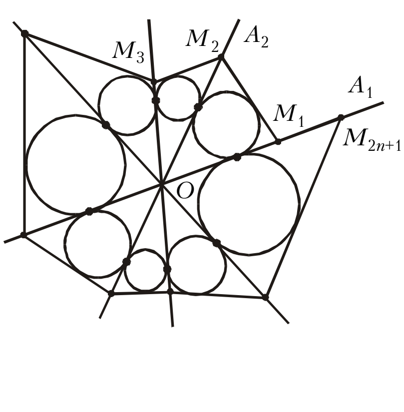


Рис.1

Заметим сразу, что формулировку задачи надо дополнить таким разъяснением. При некотором положении точки M_1 (или, аналогично, M_k) – а именно, если OM_1 немного больше 1, — касательная прямая, проведенная к окружности из M_1 (отличная от OM_1) пересекает не луч OA_2, а прямую OA_2 по другую сторону от O – эту точку пересечения следует считать точкой M_2 (и из нее проводить касательную к окружности, вписанной в угол A_2OA_3); таким образом, ломаная $M_1M_2M_3\ldots$ может получиться не только невыпуклой, но и самопересекающейся. (Строго говоря, возможен еще случай, когда касательная, проведенная из M_1, параллельна OA_2 — тогда M_2 следует считать «бесконечно удаленной» и следующую касательную проводить также параллельно OA_2.) Впрочем, если M_1 выбрана на отрезке OA_1, т.е. $OM_1 < 1$, то подобные оговорки не нужны.

Идею решения задачи можно объяснить одной фразой. Оказывается, функции, выражающие OM_{k+1} через OM_k, а также их композиция, выражаются простой формулой – они дробно-линейные, причем удовлетворяют дополнительным условиям, так что при соблюдении условия задачи итоговая функция $OM_1 \to OM_{2n+1}$ оказывается просто тождественной. Объясним это подробнее.

Каждую прямую OA_k мы рассматриваем как числовую ось с началом в точке O и единицей в соответствующей точке A_k. Обозначим координату точки M_k на оси OA_k через x_k; в частности, пусть $x_1 = x$, $x_2 = y$. Пусть $\angle A_kOA_{k+1} = 2\alpha_k$, и в частности $\alpha_1 = \alpha$.

Подсчитаем площадь треугольника OM_1M_2 (рис.2) по формуле $S = pr$, где p – полупериметр, $r = \operatorname{tg}\alpha$ — радиус вписанного круга.

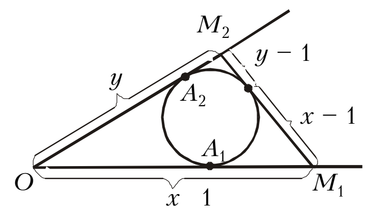


Рис.2

Поскольку $2S = xy\sin 2\alpha$, $2p = x + y + (x-1) + (y-1)$ – здесь используется равенство касательных, проведенных из одной точки к окружности, — получим: $xy\cos^2\alpha = x + y - 1$. Нетрудно проверить, что такое соотношение выполнено не только при $x > 1$, $y > 1$, как на рисунке 2, или $0 < x < 1$, но и при других значениях x, о которых шла речь вначале. Итак (при $x\cos^2\alpha \ne 1$)

$$y = f_1(x) = \frac{x-1}{x\cos^2\alpha - 1}. \quad (*)$$

Аналогичный вид имеет и функция $f_k(x_k) = x_{k+1}$. Положим $g_k = f_k \circ f_{k-1} \circ \ldots \circ f_1$, т.е. $g_2(x) = f_2(f_1(x))$, $g_3 = f_3(g_2(x))$ и т.д. Заметим, что $f_k(0) = 1$, $f_k(1) = 0$ – это легко проверить с помощью (*) и аналогичных формул для других f_k. Отсюда следует, что при четных k, в частности при $k = 2n$, $g_k(0) = 0$ и $g_k(1) = 1$ (при нечетных k, наоборот, $g_k(0) = 1$, $g_k(0) = 0$).

Далее, как нетрудно проверить, композиция (последовательное применение) двух, а значит и нескольких, дробно-линейных функций

$$y = f_1(x) = \frac{a_1x + b_1}{c_1x + d_1},\ f_2(y) = \frac{a_2y + b_2}{c_2y + d_2}$$

(здесь a_i, b_i, c_i, d_i — некоторые числа) также будет дробно линейной:

$$f_2(f_1(x)) = \frac{a_2(a_1x + b) + b_2(c_1x + d_1)}{a_2(a_1x + b_1) + d_2(a_2x + d_2)} = \frac{Ax + B}{Cx + D}.$$

Пусть $g_{2n}(x) = \dfrac{ax}{bx + c}$ (мы учли, что $g_{2n}(0) = 0$); поскольку $g_{2n}(1) = 1$, $c = b - a$. Если для некоторого ξ, отличного от 0 и 1,

$$\frac{a\xi}{b\xi + (a - b)} = \xi,$$

то $a = b\xi + a - b$ и, значит, $b = 0$, так что $g_{2n}(x) = x$ (при всех x).

Это и означает, что при любом начальном выборе точки $M_1(x)$ координата $g_{2n}(x)$ точки M_{2n+1} совпадает с x, т.е. ломаная замкнутая.

Интересно выяснить, при каких n существуют такие расположения прямых (соотношения углов α_1, α_2, … …, α_n), при которых ломаные действительно замыкаются. Нетрудно проверить, что при $n = 2$ замыкание происходит только для двух взаимно перпендикулярных прямых, когда оно очевидно.

Замечательно, что для $n = 3$ и вообще для любого нечетного n при любом расположении прямых ломаная получится замкнутой. Докажем это. Рассмотрим композицию первых n функций $f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_1 = g_n$, отображающую точку M_1 с координатой x в точку M_{n+1} с координатой $g_n(x)$. Поскольку n нечетно, $g_n(0) = 1$, $g_n(1) = 0$. Заметим, что если M_1 лежит на отрезке OA_1, $0 < x < 1$, то точка M_{n+1} лежит на симметричном ему отрезке OA_{n+1} той же прямой. Поскольку функция g_n непрерывна, найдется ξ, $0 < \xi < 1$, такое, что $g_n(\xi) = \xi$. При этом $OM_{n+1} = OM_1$ и вторая половина ломаной окажется симметричной первой относительно O; $g_{2n}(\xi) = g_n(g_n(\xi)) = \xi$. Тем самым, по доказанному, и для любой другой точки M_1 ломаная будет замкнутой: M_{2n+1} совпадает с M_1.

Н.Васильев

Ф1628. *Пластинка радиусом 20 см равномерно вращается в горизонтальной плоскости, совершая 33 оборота в минуту. От центра пластинки к ее краю ползет строго вдоль радиуса жучок маленького размера, его скорость постоянна по величине и составляет 10 см/с. При каком минимальном коэффициенте трения жучка о поверхность пластинки он сумеет добраться таким образом до края пластинки?*

Ускорение жучка в любой точке определяется силой трения, которая, в свою очередь, связана с коэффициентом трения. Ускорение мы найдем, разделив приращение скорости жучка за очень малый интервал времени τ на продолжительность этого интервала (интервал этот мы выбираем сами).

В нашем случае для расчета полного приращения скорости удобно рассмотреть три его составляющие. Одна из них связана с поворотом линейной (касательной) скорости пластинки ωr на угол $\omega\tau$ — это даст приращение скорости $\Delta v_1 = \omega r \omega\tau$, что обеспечит хорошо известное центростремительное ускорение, равное $\omega^2 r$ и направленное вдоль радиуса к центру. Вторая составляющая связана с поворотом скорости v жучка на тот же угол $\omega\tau$, что дает приращение скорости $\Delta v_2 = \omega\tau v$ и ускорение, равное ωv и направленное перпендикулярно радиусу в направлении вращения. И наконец, третья составляющая приращения скорости связана с тем, что по мере увеличения расстояния от центра вращения увеличивается линейная (касательная) скорость жучка: $\Delta v_3 = \omega(r + \Delta r) - \omega r = \omega v\tau$; это дает ускорение, равное ωv и направленное перпендикулярно радиусу в сторону вращения, т.е. она просто складывается со вторым ускорением.

Итак, полное ускорение жучка можно найти, сложив две его перпендикулярные составляющие. Модуль полного ускорения (именно эта величина нас интересует) равен

$$a = \sqrt{\left(\omega^2 r\right)^2 + (2\omega v)^2}.$$

Максимальное по величине ускорение получится у самого края пластинки, где $r = 0{,}2$ м, угловая скорость равна $\omega = 2\pi \cdot 33/60\ \text{с}^{-1} \approx 3{,}46\ \text{с}^{-1}$; при этом $a \approx 2{,}49\ \text{м/с}^2$. Принимая $g = 10\ \text{м/с}^2$, получим минимально необходимый коэффициент трения:

$$\mu = \frac{ma}{mg} \approx 0{,}25.$$

А.Жучков

Ф1629. *Два одинаковых кубика массой M каждый стоят почти соприкасаясь гранями на гладкой горизонтальной поверхности. Сверху на них аккуратно помещают шар массой m, который начинает смещаться вертикально вниз, раздвигая кубики в стороны. Найдите скорость шара непосредственно перед ударом о горизонтальную поверхность. Начальная скорость шара пренебрежимо мала. Радиус шара R, ребро кубика H. Трения нигде нет.*

Шар движется все время вертикально, кубики разъезжаются с одинаковыми скоростями. До некоторого момента шар касается кубиков, затем они разлетаются в стороны, а шар продолжает двигаться, свободно падая. Найдем положение шара, при котором прекратится касание. Обозначим угол между вертикалью и радиусом, проведенным в точку касания, α, скорость кубика u, скорость шара v. Рассмотрим момент перед самым отрывом – шар уже не давит на кубики (а они на него), но касание еще есть. В системе отсчета, которая движется вместе с кубиком, центр шара движется по окружности радиусом R. Его скорость в этой системе отсчета (кстати, это инерциальная система – ускорение кубика перед отрывом можно считать нулевым) равна $u/\cos\alpha$ и его нормальное ускорение определяется только проекцией силы тяжести:

$$a_{\text{н}} = \frac{(u/\cos\alpha)^2}{R} = g\cos\alpha.$$

Мы получили соотношение между скоростью кубика в момент отрыва и косинусом угла α в этот момент. Дополним это соотношение еще одним уравнением для тех же переменных – его можно получить из закона сохранения энергии с учетом того, что $v = u\,\mathrm{tg}\,\alpha$:

$$mgR(1 - \cos\alpha) = \frac{mv^2}{2} + Mu^2 = \frac{mu^2\,\mathrm{tg}^2\alpha}{2} + Mu^2.$$

Подставляя в это уравнение значение квадрата скорости кубика u, получим уравнение для функции искомого угла α:

$$mgR(1-\cos\alpha)=\left(\frac{1}{2}m\,\mathrm{tg}^2\alpha+M\right)gR\cos^3\alpha,$$

или, введя обозначение $\gamma = M/m$:

$$(2\gamma-1)\cos^3\alpha+3\cos\alpha-2=0.$$

Это уравнение можно решить, пользуясь известной формулой Кардано, но это не обязательно – вполне можно ограничиться численным (или графическим) решением для нескольких конкретных значений отношения масс. Например, для $\gamma = 1$ получаем $\cos\alpha\approx0{,}596$, для $\gamma = 2$ получаем $\cos\alpha\approx 0{,}523$, для еще большего значения отношения масс (легкий шар) $\gamma = 50$ получаем $\cos\alpha\approx0{,}235$. Попробуем теперь уменьшать величину γ, но так, чтобы коэффициент при кубическом слагаемом в уравнении оставался положительным – значение $\cos\alpha$ будет стремиться к $2/3$. При отрицательных значениях этого коэффициента получаются большие значения для $\cos\alpha$ — от $2/3$ до 1.

Дальше все уже просто – скорость кубиков после отрыва не меняется, и скорость шара V перед ударом о плоскость находим при помощи закона сохранения энергии

$$mgH=\frac{mV^2}{2}+Mu^2.$$

При этом $u^2=gR\cos^3\alpha$, а значения косинуса предельного угла мы находили раньше — подставляя их, найдем ответы для различных соотношений масс.

З.Рафаилов

Ф1630. *На гладком горизонтальном столе покоится тележка массой M и длиной L. Посредине тележки находится кубик маленького размера, его масса m. Кубику сообщают толчком скорость v по направлению к одному из бортиков тележки. Найдите смещение тележки к тому моменту, когда кубик снова окажется посредине тележки, испытав ровно 17 ударов. Считать удары кубика о бортики тележки абсолютно упругими.*

В этой задаче можно долго и подробно анализировать движение тележки – после первого удара она поедет, после второго остановится, затем снова поедет и т.д. Но ответ можно получить и очень быстро – нужно только учесть, что при абсолютно упругом лобовом ударе двух тел их относительная скорость остается неизменной (это легко доказать – убедитесь сами) и поэтому интервал между последовательными ударами составит L/v. Всего от начала движения до интересующего нас момента пройдет: полинтервала до первого удара, затем 16 интервалов между ударами (проверьте!) и еще полинтервала между ударами (еще “полтележки»), т.е. $T = 17L/v$. За это время центр масс системы сместится на

$$s=Tv_{\text{цм}}=17\frac{L}{v}\cdot v\frac{m}{M+m}=17L\frac{m}{M+m}.$$

Р.Александров

Ф1631. *Три маленьких заряженных тела одной и той же массы движутся в пространстве вдали от всех других тел. В некоторый момент тела оказываются на одной прямой, при этом ускорение среднего равно по величине a и ускорение одного из оставшихся в этот момент составляет по величине 3a. Найдите ускорение третьего тела в этот же момент времени.*

Система находится вдали от всех других тел, поэтому ускорение центра масс системы равно нулю. Отсюда сразу можно найти ускорение третьего тела. Действительно, если ускорения первых двух направлены в одну сторону, то ускорение третьего равно $4a$ и направлено в противоположную сторону. Если же исходные ускорения направлены в разные стороны, то ускорение третьего тела равно $2a$ и направлено против ускорения, равного $3a$.

М.Учителев

Ф1632. *Куб с ребром a = 10 см, имеющий массу M = = 1 кг, подвешен на пружине жесткостью k = = 400 Н/м так, что его основание параллельно земле. Снизу на куб направляют поток маленьких упругих шариков, обладающих скоростью v_0 = 20 м/с на высоте первоначального положения нижней грани куба. Куб начинает колебаться, двигаясь поступательно вдоль вертикальной оси. Найдите период и амплитуду этих колебаний. Оказывается, колебания эти медленно затухают, хотя никакого трения тут нет. Объясните причину затухания колебаний и оцените время, в течение которого амплитуда уменьшится на 10%. Масса одного шарика m = 1 г, концентрация шариков в потоке n = 1000 $м^{-3}$. Ударами шариков друг о друга пренебречь.*

Ударяясь о нижнюю грань куба и упруго отскакивая, шарики создают почти постоянную (дальше мы уточним эту оценку) силу, направленную вверх. Эта сила смещает положение равновесия куба на пружине вверх, и в системе начинаются колебания.

Оценим величину силы, считая для начала куб неподвижным. За малый отрезок времени τ о грань куба ударятся только те шарики, которые находятся на расстоянии $v_0\tau$ от грани, — таких шариков будет $na^2v_0\tau$. Каждый удар передает кубу импульс $2mv_0$, всего за время τ куб получает импульс $na^2v_0\tau\cdot 2mv_0$. Это дает силу, равную $F=2na^2mv_0^2$, которая смещает положение равновесия на $s = F/k$. Такой и была бы амплитуда колебаний, если бы не затухание, которое эту амплитуду уменьшает. Период колебаний груза на пружине определяется стандартной формулой $T=2\pi\sqrt{M/k}$ — это самые обычные колебания груза на пружине.

Сделаем теперь числовые оценки: сила F = 8 Н, смещение s = 0,02 м, период $T\approx$ 0,31 с.

Максимальное значение скорости можно найти из закона сохранения энергии, а можно просто умножить амплитуду на круговую частоту колебаний $\omega=2\pi/T$ — получим v = 0,4 м/с. Малая амплитуда колебаний позволяет считать, что положение нижней грани почти не меняется и скорость шариков перед ударом можно считать равной v_0. А вот импульс, передаваемый кубу, меняется в зависимости от его скорости – именно этим и объясняется затухание.

Посчитаем силу, действующую на движущийся куб. При скорости куба, направленной вверх и равной u, сила будет равна

$$F=2na^2m(v_0-u)^2=2na^2m\left(v_0^2+u^2\right)-4na^2mv_0u.$$

При изменении скорости куба на противоположную второе слагаемое меняет знак. Слагаемое это очень похоже на силу вязкого трения – она также направлена против скорости и пропорциональна ей по величине. (Если бы сила оказалась не зависящей от направления скорости, работа ее за период колебаний была бы нулевой и затухания не было бы.) Сделаем очень грубую оценку затухания. Возьмем четверть периода колебаний – от нуля до максимального отклонения от положения равновесия на s. Силу трения заменим на ее «среднее» значение, т.е. на половину от максимального значения f. Тогда работа этой силы будет равна $A = 0{,}5fs \approx 3\cdot 10^{-3}$ Дж. Энергия колебаний системы вначале равна $W = ks^2/2 = 0{,}08$ Дж. Уменьшение амплитуды на 10% (по условию) соответствует потере 20% энергии, при потере же за четверть периода примерно 4% (это A/W) мы получим, что время заданного затухания составляет приблизительно один – полтора периода колебаний, т.е. 0,3 – 0,4 секунды.

Можно сделать и более аккуратную оценку – либо решая уравнение колебаний с затуханием, либо пользуясь аналогией с колебательным контуром, содержащим катушку, конденсатор и небольшой резистор (для этого случая все формулы хорошо известны). Однако и наша оценка вполне разумна.

А.Зильберман

Ф1633. *Цикл тепловой машины состоит из двух адиабат и двух изохор. Найдите КПД цикла, если известны температуры T_1 и T_2 — начальная и конечная для одной из адиабат. Рабочее тело — идеальный газ.*

Пусть цикл тепловой машины *1–2–3–4–1* состоит из адиабатического расширения *1–2*, изохорического охлаждения *2–3*, адиабатического сжатия *3–4* и изохорического нагревания *4–1*. Введем обозначения: T_1, T_2, T_3 и T_4 — температуры в точках *1, 2, 3* и *4* соответственно. Газ получает тепло от нагревателя ($Q_н$) на участке *4–1* и отдает тепло холодильнику ($Q_х$) на участке *2–3*. Для расчета КПД не обязательно знать уравнение адиабатического процесса, а вполне достаточно понимать, что отношение начальной и конечной температур на адиабате однозначно определяется отношением начального и конечного объемов. Отсюда следует, что $T_1 : T_2 = T_4 : T_3$. Запишем теперь выражение для КПД цикла:

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н}.$$

Найдем количество теплоты, полученное газом на участке *4–1*. В этом процессе газ работы не совершает, а полученное тепло идет целиком на повышение внутренней энергии газа, поэтому $Q_н = U_1 - U_4 = \nu C_V (T_1 - T_4)$. Аналогично, переданное холодильнику количество теплоты равно $Q_х = U_2 - U_3 = \nu C_V (T_2 - T_3)$. Тогда для искомого КПД получим

$$\eta = \frac{(T_1 - T_4) - (T_2 - T_3)}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{T_2(1 - T_3/T_2)}{T_1(1 - T_4/T_1)} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$

Примечание: обратите внимание на то, что, хотя это выражение и напоминает внешне известную формулу для КПД идеальной тепловой машины, температуры в нашем случае совсем не те – в известную формулу подставляют температуры холодильника и нагревателя.

А.Зильберман

Ф1634. *В распоряжении физика есть два тепловых резервуара — очень горячий с температурой +200 °С и просто горячий с температурой +70 °С. Окружающая среда имеет постоянную температуру +20 °С. Физику велено сообщить очень горячему телу количество теплоты 1000 Дж и просто горячему — количество теплоты 2000 Дж. Какую минимальную механическую работу ему придется для этого совершить? Теплоемкости горячего и очень горячего тел можно считать очень большими.*

Передавать тепло от холодного тела к горячему позволяет так называемая обращенная тепловая машина. Она использует обычный тепловой цикл, но он проводится в обратном направлении, т.е. при контакте с горячим телом (нагревателем) рабочее тело не расширяется, совершая работу, а сжимается и при этом тепло перетекает в нагреватель, при контакте же с холодным телом (холодильником) рабочее тело расширяется и при этом тепло отнимается от холодильника. Если в качестве такой машины использовать идеальную тепловую машину, обратив ее цикл, то для перекачки заданной порции тепла между данными горячим и холодным телами потребуется минимальная работа.

Итак, мы используем обращенную идеальную тепловую машину, коэффициент полезного действия которой (в прямом цикле) нам известен:

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{T_н - T_х}{T_н}.$$

Такое же соотношение между затраченной работой и количеством теплоты, переданным горячему телу, получится и в обращенном цикле. Осталось решить, сколько тепла очень горячее тело должно получить от холодного тела, а сколько – от горячего. И хотя ответ очевиден, проведем расчет. Обозначим количество теплоты, которое мы передадим непосредственно от холодного (T_3 = 293 К) к очень горячему (T_1 = 473 К) телу буквой Q, тогда от горячего (T_2 = 343 К) останется передать $Q_1 - Q$ тепла, где Q_1 = 1000 Дж. На все это понадобится работа

$$A_1 + A_2 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1}.$$

Осталось найти количество теплоты, которое нужно передать от холодного тела горячему. При передаче $Q_1 - Q$ тепла очень горячему телу горячее «потеряло» только $(Q_1 - Q)T_2/T_1$ — остальное дала совершенная при этом работа. Значит, нужно еще сообщить количество теплоты $Q_2 + (Q_1 - Q)T_2/T_1$, где Q_2 = 2000 Дж. При этом необходимо совершить работу

$$A_3 = \left(Q_2 + \frac{(Q_1 - Q)T_2}{T_1}\right)\frac{T_2 - T_3}{T_2}.$$

Складывая рассчитанные величины работ, получаем полную работу:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{Q(T_1 - T_3)}{T_1} + \frac{(Q_1 - Q)(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + (Q_1 - Q)T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1 T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} + Q\left(\frac{T_1 - T_3}{T_1} - \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\frac{T_2 - T_3}{T_2}\right).$$

Нетрудно увидеть, что множитель при Q в точности равен нулю. Это говорит о том, что необходимая работа вовсе не зависит от того, какие порции тепла мы забираем у конкретных тел. Результат будет во всех случаях одинаковым:

$$A = \frac{Q_1(T_1 - T_2)}{T_1} + \frac{(Q_2 + Q_1 T_2/T_1)(T_2 - T_3)}{T_2} \approx 672 \text{ Дж}.$$

А.Теплов

Ф1635. *Нелинейный двухполюсник имеет вольт-амперную характеристику, которая описывается формулой $U = 10I^2$, где ток измеряется в амперах, а напряжение — в вольтах. Два таких двухполюсника соединены последовательно и подключены к идеальной батарейке с напряжением E = 10 В. Параллельно одному из двухполюсников подключают резистор. При каком сопротивлении этого резистора тепловая мощность, которая на нем выделяется, окажется максимальной?*

Пусть напряжение на резисторе, подключенном параллельно одному из двухполюсников, равно U. Тогда на втором двухполюснике напряжение равно $\mathsf{E} - U$, а через резистор идет ток, равный разности токов двухполюсников:

$$I = \frac{\sqrt{\mathsf{E} - U} - \sqrt{U}}{\sqrt{\alpha}}$$

(вместо конкретного числового значения 10 $\text{В}/\text{А}^2$ мы используем букву α). Мощность, рассеиваемая на резисторе, равна

$$P = UI = \frac{U\left(\sqrt{\mathsf{E} - U} - \sqrt{U}\right)}{\sqrt{\alpha}}.$$

У нас получилась функция одной переменной − напряжения на резисторе, и мы можем обычным способом исследовать эту функцию на максимум. Нужно только учесть, что напряжение на параллельной цепочке обязательно получится меньше половины напряжения батарейки. Возьмем производную по U и приравняем ее к нулю, отбросив ненужный множитель $1/\sqrt{\alpha}$:

$$\sqrt{\mathsf{E} - U} - \frac{U\sqrt{\mathsf{E} - U}}{2} - \frac{3\sqrt{U}}{2} = 0.$$

После несложных преобразований мы получим квадратное уравнение

$$18U^2 - 21\mathsf{E}U + 4\mathsf{E}^2 = 0.$$

Выбирая нужный корень, найдем

$$U = \frac{\mathsf{E}\left(21 - \sqrt{153}\right)}{36} \approx 0{,}24\mathsf{E}.$$

Ток I мы уже выразили через U, теперь легко найти величину сопротивления нужного нам резистора:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{U\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\mathsf{E} - U} - \sqrt{U}} \approx 6{,}27 \text{ Ом}.$$

З.Рафаилов

Ф1636. *К идеальной батарейке подключены последовательно конденсатор емкостью C = 100 мкФ и амперметр, сопротивление которого составляет r = 10 Ом. При помощи быстродействующего переключателя конденсатор в этой цепи переключается n = 100 раз в секунду то в одной, то в другой полярности (выводы конденсатора все время меняются местами друг с другом); стрелка прибора при этом практически не дрожит. Обычный магнитоэлектрический амперметр показывает в таком случае силу тока I_1 = 0,01 А. Что покажет в такой цепи амперметр тепловой системы с тем же сопротивлением? Приборы были отградуированы в цепи постоянного тока.*

За время между переключениями $T = 1/n$ = 0,01 с конденсатор успевает практически полностью перезарядиться (характерное время для цепи с конденсатором емкостью C = 100 мкФ и резистором сопротивлением R = 10 Ом составляет 0,001 с, что существенно меньше рассчитанного T). При каждом переключении по цепи протекает заряд $q = 2CU$, средний ток при этом составляет $I_1 = 2CUn$. Для расчета показаний теплового амперметра нам понадобится напряжение батарейки. Выразим его из полученного соотношения: $U = I_1/(2Cn)$.

При каждом переключении батарейка совершает работу $A = Uq = 2CU^2$, энергия конденсатора каждый раз одна и та же, значит, вся работа переходит в тепло. За секунду в резисторе (амперметре) выделяется в виде тепла энергия $2CU^2n$, и показание амперметра тепловой системы I_2 можно найти из соотношения

$$I_2^2 r = 2CU^2 n = \frac{I_1^2}{2Cn}.$$

Отсюда

$$I_2 = \frac{I_1}{\sqrt{2Cnr}} \approx 0{,}022 \text{А}.$$

А.Повторов

Ф1637. *Катушка индуктивностью L = 1 Гн присоединена параллельно конденсатору емкостью C = 10 мкФ, последовательно с получившимся контуром включен еще один такой же конденсатор и к получившейся цепи подключен генератор низкой частоты с амплитудой выходного напряжения U_0 = 1 В. На какой частоте ток, потребляемый от генератора цепью, получается очень малым? На какой частоте этот ток резко возрастает? Оцените максимальную амплитуду напряжения на катушке, если сопротивление провода ее обмотки R = 10 Ом. Остальные элементы цепи считайте идеальными.*

Для ответов на первые два вопроса будем считать элементы цепи идеальными − разница получится совсем небольшой, а рассуждения сильно упростятся. Очень малым ток получится на такой частоте ω_1, при которой параллельный контур имеет очень высокое (для идеальных элементов — бесконечное) сопротивление. В этом случае токи через конденсатор и катушку в параллельном контуре равны друг другу по величине и противоположны по фазе, откуда получаем

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Сильно возрастает ток цепи на частоте ω_2, определяемой условием: напряжения на контуре и на последовательном конденсаторе почти компенсируют друг друга (при идеальных элементах цепи компенсация будет полной, и ток в цепи может оказаться сколь угодно большим). Для компенсации нужно, чтобы токи через конденсаторы были одинаковы и текли в противоположные стороны, следовательно, ток катушки должен быть в два раза больше, чем ток параллельного ей конденсатора:

$$2I\omega_2 L = \frac{I}{\omega_2 C}, \text{ откуда } \omega_2 = \frac{1}{\sqrt{2LC}}.$$

Для оценки максимального напряжения на катушке нам придется учитывать влияние небольшого (это мы дальше проверим) последовательного сопротивления – без него амплитуда получилась бы сколь угодно большой. Для грубой оценки вполне можно считать, что максимальная амплитуда будет на частоте ω_2. Строго говоря, это будет на немного другой частоте, однако при небольшом последовательном сопротивлении разность этих частот совсем мала. Итак, на указанной частоте напряжение катушки почти равно напряжению последовательного конденсатора и имеет противоположную фазу. Это означает, что напряжение генератора приложено к резистору сопротивлением R и по нему (а значит, и по катушке) течет ток, амплитудное значение которого равно $I_0 = U_0/R = 0{,}1$ А. Тогда на катушке амплитуда напряжения составит

$$U_L = I_0\omega_2 L = \frac{U_0 L}{R\sqrt{2LC}} = \frac{U_0}{R}\sqrt{\frac{L}{2C}} \approx 22{,}5 \text{ В}.$$

Мы видим, что напряжение существенно превышает амплитуду генератора – затухание контура получилось небольшим и наши предположения о малости последовательного сопротивления достаточно оправданы. Аккуратный расчет дает для амплитуды напряжения на катушке почти в 2 раза меньшую величину – примерно 11 В, однако и наша грубая оценка вполне разумна.

А.Повторов