«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №2)

1. *Указание.* Начинать надо с самого высокого семиклассника, перестановки можно осуществлять по парам (менять местами самого высокого с тем, кто занимает его «законное» место, и так далее). При каждой такой перестановке условие, сформулированное в задаче, будет сохраняться (докажите).
2. Поскольку мастер Седов не черноволосый (он отвечает черноволосому) и не седой, то он рыжий; кандидат в мастера не рыжий и не черноволосый, стало быть – седой.
3. См. рис.1.

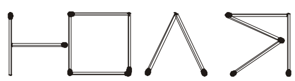

Рис. 1

4. 5.
5. На черных полях вертикальных рядов доски с нечетным номером ставим букву A, на остальных черных полях ставим букву B (рис.2). На белых полях горизонтальных рядов с четными номерами ставим букву C. Число фигур, стоящих на

	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C
	B		B		B		B
A	C	A	C	A	C	A	C

Рис. 2

A-полях, равно n, на B-полях – m, на C-полях – k. В силу условия задачи числа $n + k$ и $m + k$ являются четными. Но тогда число $n + m$ тоже четное, т.е. на черных полях стоит четное количество фигур.

РАЗУМНО ИЛИ ЛОГИЧНО?

1) … читать! 2) … во всех остальных.
3) … какая вам разница? 4) … девятерых попутчиков!
5) … тех, кто мне не верил! 6) … Окно!
7) … станет теплее? 8) … столько денег!
9) … найденные. 10) … железной дороге.
11) … только два пятьдесят. 12) … ничего и не делал.
13) … волос уже нет. 14) … разбежаться?
15) … их поносить! 16) … на твою лошадь. 17) … хожу.
18) … врач. 19) … гостиница слишком низкая.
20) … с ними разговаривать!

Разделение на «логичные» и «разумные» ответы, конечно, весьма условно. Нормальная разговорная речь практически никогда не бывает совершенно формальной. Даже в такой формализованной системе, как юридический язык, строгий логик нашел бы много пробелов и не сформулированных явно высказываний. Однако можно заметить, что в задачах 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14 правильный ответ использует в основном информацию, данную в самом анекдоте, а в остальных требуется привлечь знания о ситуации.

КОНКУРС «МАТЕМАТИКА 6–8»

(см. «Квант» №6 за 1997 г.)

11. Пусть в книге напечатано C сказок, причем n-я сказка начинается на странице с номером H_n, заканчивается на странице с номером K_n, $n = 1, 2, \ldots, C$. Титул, как известно, всегда располагается в начале книги, а вот аннотация и оглавление могут оказаться как в начале книги, так и в конце. Чтобы не нарушать общности, будем считать, что дополнительной информацией заняты D первых страниц, а также $3 - D$ страниц в конце книги, где D равно либо 1, либо 2, либо 3. Отсюда следует, что $H_1 = D + 1$, а $K_C = 120 - (3 - D) = 117 + D$. Поскольку каждая сказка начинается с новой страницы, то $H_2 = K_1 + 1$, $H_3 = K_2 + 1$, …, $H_C = K_{C-1} + 1$. Сложив последние равенства, получим $S_H - H_1 = S_K - K_C + C - 1$, где $S_H = H_1 + H_2 + \ldots + H_C$ — сумма номеров страниц, на которых начинаются сказки, а $S_K = K_1 + K_2 + \ldots + K_C$ — сумма номеров страниц, на которых сказки заканчиваются. Выражая H_1 и K_C через D, а также учитывая, что по условию задачи $S_K = 5S_H$, отсюда получаем $S_H = \frac{117 - C}{4}$. Число S_H может быть целым лишь в случае, когда C равно 1, 5, 9, 13, …, т.е. имеет вид $C = 4m + 1$, где m – целое неотрицательное число.
Оценим снизу значение S_H. Так как $H_1 = D + 1$, $H_2 \ge D + 2$, $H_3 \ge D + 3$, …, $H_C \ge D + C$, то

$$S_H \ge (D+1) + (D+2) + \ldots + (D+3) =$$
$$= \frac{C(C+2D+1)}{2} \ge \frac{C(C+2\cdot 1+1)}{2} = \frac{C(C+3)}{2}.$$

Следовательно, $\frac{117 - C}{4} \ge \frac{C(C+3)}{2}$, откуда $2C^2 + 7C \le 117$. Для указанного вида C решения этого неравенства: $C = 1$ и $C = 5$.
Если $C = 1$, то сказка в книге всего одна. При этом $S_H \le 4$ и $S_K \ge 117$, откуда $S_K/S_H > 5$, что противоречит условию. В случае $C = 5$ распределение сказок по страницам книги может быть, например, таким:

номер сказки	1	2	3	4	5	*сумма:*
номер страницы, на которой сказка начинается	3	4	5	6	10	28
номер страницы, на которой сказка заканчивается	3	4	5	9	119	140

Таким образом, в книге напечатано 5 сказок.
12. Обозначим угловые меры дуг окружности, как показано на рисунке 3. Тогда

$$\angle DAB = \frac{1}{2}(l_2 + s_2 + l_3 + s_3 + l_4 - l_1);$$
$$\angle BCD = \frac{1}{2}(l_2 + s_1 + l_1 + s_4 + l_4 - l_3);$$
$$\angle DAB + \angle BCD = \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_2 + l_4 - \frac{1}{2}(l_1 + l_3).$$

Аналогично,

$$\angle ABC + \angle CDA = \frac{1}{2}(s_1 + s_2 + s_3 + s_4) + l_1 + l_3 - \frac{1}{2}(l_2 + l_4).$$

Поскольку по условию $l_1 + l_3 = l_2 + l_4$, то $\angle DAB + \angle BCD = \angle ABC + \angle CDA$, и следовательно, вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.
13. Одно из возможных решений показано на рисунке 4.
14. Перепишем уравнение в виде

$$(a-2)(b-2) + (b-2)(c-2) + (c-2)(a-2) = 12.$$

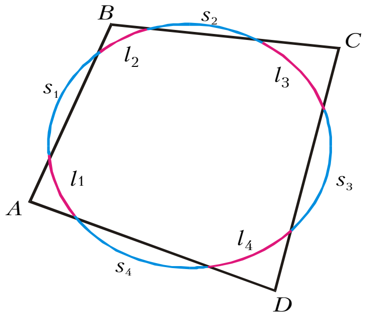

Рис. 3

Учитывая симметрию задачи, будем искать решение, удовлетворяющее условию $a \le b \le c$. Пусть $a = 1$, тогда $(b - 3)(c - 1) = 13$, откуда $b = 4$, $c = 16$. Пусть $a = 2$, тогда $(b - 2)(c - 2) = 12$ и либо $b = 3$, $c = 14$, либо $b = 4$, $c = 8$, либо $b = 5$, $c = 6$. Пусть $a = 3$, тогда $(b - 1)(c - 1) = 13$, что невозможно.

Пусть $a = 4$, тогда $bc = 16$, откуда $b = c = 4$.

При $a \ge 5$ решений нет: $(a - 2)(b - 2) + (b - 2)(c - 2) + (c - 2)(a - 2) \ge 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 27 > 12$.

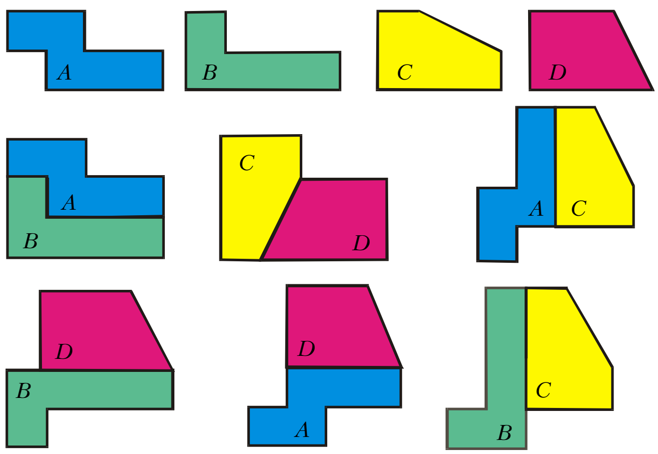

Рис. 4

Остальные решения получаются перестановкой переменных a, b и c.

15. Положим $a_1 = a$, $a_2 = b$, тогда $a_3 = \dfrac{b+1}{a}$;

$$a_4 = \frac{\frac{b+1}{a} + 1}{b} = \frac{a+b+1}{ab};$$

$$a_5 = \frac{\frac{a+b+1}{ab} + 1}{\frac{b+1}{a}} = \frac{a+1}{b};$$

$$a_6 = \frac{\frac{a+1}{b} + 1}{\frac{a+b+1}{ab}} = a; \quad a_7 = \frac{a+1}{\frac{a+1}{b}} = b.$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a_n\}$ периодическая: ее значения повторяются через 5 номеров. Следовательно, $a_{1997} = a_2 = 1828$.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС СПУТНИКА

1. Такое явление наблюдается, когда на орбитальное движение тела влияет сопротивление разреженного атмосферного воздуха. Суть дела в том, что, двигаясь в разреженном газе, компактный спутник, укомплектованный научными приборами или другим оборудованием, испытывает меньшее сопротивление, чем сравнительно большая по размерам пустотелая ракета с отработанными двигателями. У ракеты больший баллистический коэффициент C, или, как иногда говорят, большая парусность, чем у спутника. Вот почему аэродинамический парадокс выражен более ярко для ракеты, нежели для спутника, который падает на Землю в разреженной атмосфере медленнее и по более пологой траектории. Таким образом, спутник заметно отстает от ракеты, хотя последняя испытывает большее торможение в разреженной атмосфере, чем спутник.

2. Движение спутника по эллиптической орбите, пересекающей верхние разреженные слои атмосферы, имеет интересную особенность. В перигее спутник, испытывая максимальное сопротивление, теряет в скорости на каждом витке, и, тем самым, его апогей уменьшается. В апогее торможение спутника меньше, чем в перигее, особенно если орбита заметно вытянута. Поэтому перигей не снижается так сильно, как апогей, т.е. орбита действительно стремится к круговой. (Точное решение задачи о движении спутника достаточно сложное, так как требуется учитывать еще изменение скорости спутника на каждом витке вследствие его падения в поле тяжести Земли.)

3. *Указание.* Воспользуйтесь уравнением моментов (7).

4. Допустим, что сила притяжения спутника к планете определяется выражением $F = A/R^n$, где A – постоянная. Из уравнения $mv^2/R = A/R^n$ найдем выражение для кинетической энергии спутника:

$$W_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{A}{2R^{n-1}}.$$

Для заданного поля сил потенциальная энергия спутника равна

$$W_{\text{п}} = -\frac{A(n-1)}{R^{n-1}},$$

а полная энергия составляет

$$W_{\text{пол}} = \frac{A}{2R^{n-1}}(3-2n) = W_{\text{к}}(3-2n).$$

Баланс полной энергии спутника в начале и в конце витка с учетом работы силы сопротивления $F_{\text{сопр}}$ приводит к такому выражению для тангенциального ускорения пролетающего в разреженной атмосфере спутника:

$$a_{\text{т}} = \frac{F_{\text{сопр}}}{m(2n-3)}.$$

Отсюда очевидно, что при $n > 1{,}5$ можно говорить об аналоге аэродинамического парадокса спутника в гравитационном поле.

5. Так как орбитальная скорость спутника во много раз превышает среднюю тепловую скорость молекул, находящихся в верхних слоях атмосферы, при расчетах сил торможения спутника мы не учитывали собственное движение частиц среды. Казалось бы, торможение спутника на больших высотах не должно зависеть от температуры воздуха T. Однако это не так. Дело в том, что при изменении температуры изменяется плотность газа – с ростом температуры плотность возрастает. Увеличивается также характерная толщина атмосферы $\Delta h \approx RT/(\mathrm{M}g)$, на которой давление газа изменяется в e раз (здесь R – универсальная газовая постоянная, М – молярная масса воздуха, g – ускорение свободного падения). Вариации плотности газа из-за изменения температуры сказываются на торможении спутника.

6. Мы знаем, что если бы на Земле не было гор и впадин, а вода всего мирового океана равномерно покрывала земной шар, то глубина этого океана была бы около 2 км. Давление на дне достигало бы величины 200 атм. Чтобы при таком давлении превратить воду в пар, требуется ее нагреть до температуры чуть больше 600 К – именно такой должна быть минимальная температура атмосферы Земли, чтобы вся свободная вода на Земле существовала в виде пара. В этом случае Земля будет окружена толстой и плотной атмосферой водяного пара высотой в сотни километров. Для такой атмосферы характерный перепад высот, на котором атмосферное давление уменьшается в e раз, будет около 30 км (т.е. в 3 раза больше). Из-за плотного атмосферного «хвоста» водяного пара станет невозможным полет спутников на сравнительно низких орбитах, на которых они сейчас летают. В то же время для таких удаленных объектов, как Луна, влияние земной атмосферы из водяного пара на орбитальные движения будет все же пренебрежимо малым.

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Вопросы и задачи

1. См. рис.5.

2. См. рис.6.

3. Если экран расположен от фигуры на расстоянии, большем $h\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (где α — угол падения солнечных лучей), длина тени будет $2h$ (рис.7). Если экран расположен ближе, длина тени будет меньше.

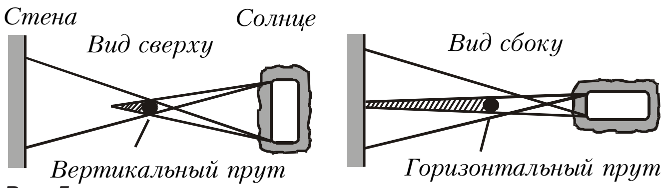

Рис. 5

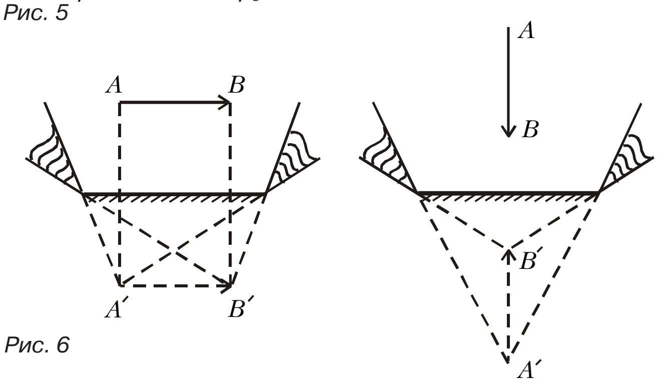

Рис. 6

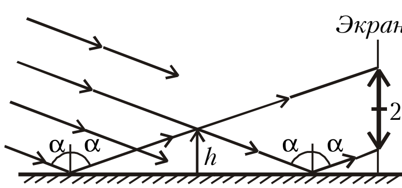

Рис. 7

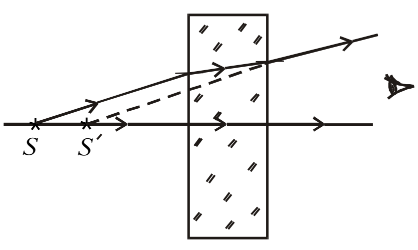

Рис. 8

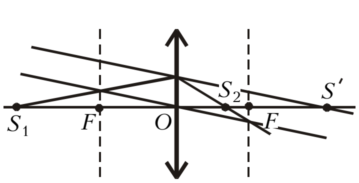

Рис. 9

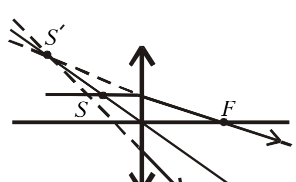

Рис. 10

4. Чтобы собрать на рассматриваемый препарат больше света.

5. См. рис.8.

6. Изображение – мнимое.

7. См. рис.9. Источник находится в точке S_1, если изображение действительное, и в S_2, если изображение мнимое.

8. См. рис.10.

9. См. рис.11.

10. Один из вариантов построения приведен на рисунке 12.

11. Да. В этом случае объектив фотоаппарата действует подобно глазному хрусталику.

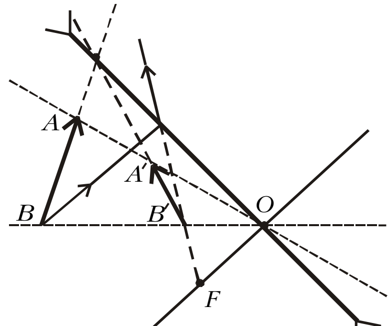

Рис. 11

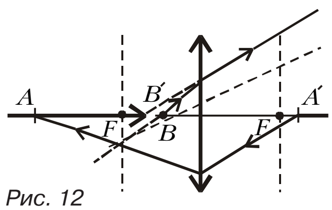

Рис. 12

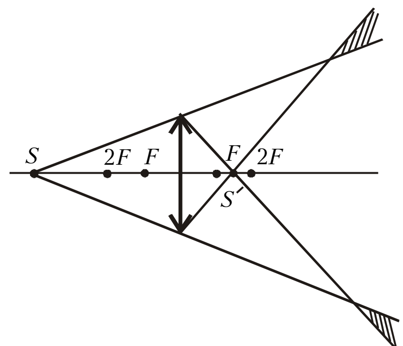

Рис. 13

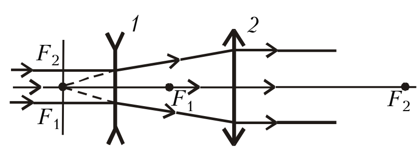

Рис. 14

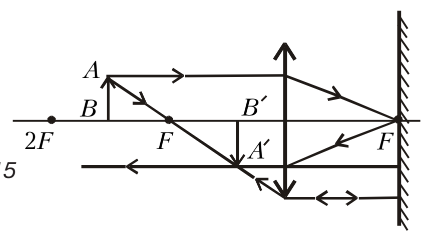

Рис. 15

12. Источник света должен быть к линзе ближе, чем двойной фокус, иначе образуются области, из которых источник и изображение видны одновременно (заштрихованные на рис.13).

13. См., например, рис.14. **14.** См. рис.15.

15. В космосе нет поглощения света атмосферой, меньше яркость неба, отсутствует атмосферное дрожание, а длительность экспозиции не ограничена только ночным временем– т.е. снижено или исключено влияние факторов, мешающих получать на Земле изображение слабых звезд.

Микроопыт

В результате двойного отражения ваше изображение не будет «переворачиваться» слева направо. Если комната прямоугольной формы, вы увидите себя в зеркале из любой ее точки.

УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ «НЕ РЕШАЮТСЯ»

1. $\varnothing$. **2.** $-1/3$. **3.** $2\pi-8; 2\pi-1; 2\pi$. **4.** 2.
5. $(1, 513/2, 128)$, $(-1, -513/2, -128)$.
6. $2\pi n$, $\pi/2+2\pi k$, $n, k\in\boldsymbol{Z}$. **7.** (2, 2).
8. $(1;\infty)$. **9.** $1/3$. **10.** $[-3; 9]$. **11.** $(2;\infty)$.
12. (1; 0), (0; 1). **13.** $(\pi/4, \pi/4)$, $(-\pi/4, -\pi/4)$.
14. 0, $1/2$, 1. **15.** (0; 4). **16.** $(1/2; 1)$.
17. $(2, -3, 3)$, $(1, 0, 0)$. **18.** $(-1; -2)$. **19.** $\varnothing$.
20. $[-1; 1]$. **21.** $(2, -2\pm 2\pi/3+2\pi n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$.
22. $(1; -1)$. **23.** 7. **24.** $(-1; 2)$, $(-1; -2)$.

ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В ЗАДАЧАХ ПО ФИЗИКЕ

1. $m_л = 2{,}05$ кг. **2.** $p = 0{,}81$ атм. **3.** $V_1/V = 3/7$.
4. $p = 0{,}95$ атм. **5.** $\alpha = 75\%$. **6.** $m_г = 6$ г.
7. $Q = \Delta U + \nu R(T+\Delta T)/2$. **8.** $\Delta m/m = 0{,}24\%$.
9. $p = 0{,}69$ атм.

VII МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ МАРАФОН»

Письменный индивидуальный тур

МАТЕМАТИКА

1. Существует. Например, число $2^{35}\cdot 3^{35}\cdot 5^{84}\cdot 7^{90}$ удовлетворяет условию.
2. 30°, 60°, 90°.
3. (0; 0; 0); (0; 1; 1); (1; 0; 1); (–1; 0; –1); (–1; –1; 0), $\left(\left(1\pm\sqrt5\right)/2;\ \left(1\pm\sqrt5\right)/2;\ \left(1\pm\sqrt5\right)/2\right)$.
4. 1842. *Указание*. Докажите, что последовательность a_n периодична с периодом 5, т.е. что $a_{n+5} = a_n$. Тогда $a_{19} = a_4$, $a_{97} = a_2$, $a_{1998} = a_3$.
5. Можно (см. рис.16).
6. Бесконечно. Поскольку уравнение можно переписать как $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 = 6$, его решениями будут, например, $x = n+1$, $y = n$, $z = n-1$, где $n\in\boldsymbol{N}$.

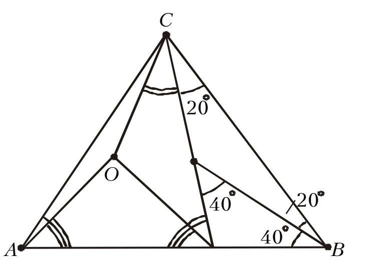

Рис. 16

7. а) 1; б) 2; в) $\left[\frac{n}{2}\right]$. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что функция $f = x_1 + \ldots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - \ldots - x_{n-1}x_n - x_nx_1$ — линейная по каждому из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Зафиксируем $x_1, \ldots x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, \ldots, x_n$ и положим $x_k = x$. Тогда $f(x) = kx + l$ достигает своего наибольшего значения либо при $x = 0$, либо при $x = 1$. Повторяя проведенное рассуждение, убеждаемся в том, что максимальное значение функции f достигается, когда некоторые из x_l равны 0, а остальные 1. Остается выбрать наибольшее из значений f при таких x.

ФИЗИКА

1. а) В режиме проскальзывания колеса
$$a = g\frac{m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)-\mu M}{m+M},\quad T = g\frac{mM}{M+m}(\mu+\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$
б) В режиме качения без проскальзывания
$$a = g\frac{m(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}{m+2M},\quad T = g\frac{2mM}{2M+m}(\sin\alpha-\mu\cos\alpha).$$
в) В состоянии покоя $a = 0$, $T = 0$.
2. $x_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g}\left(1-\dfrac{\beta v_0^2}{2mg}\right)$.
3. $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\omega^2 = \dfrac{\gamma}{M}\dfrac{(Mg+p_0S)^2}{RT_0}$, где $\gamma = 5/3$ – показатель степени адиабаты, R – универсальная газовая постоянная.
4. $H = h\left(1+\delta\left(\dfrac{\rho RT_0}{\mathrm{M}p_0}-1\right)\right)\approx h\delta\dfrac{\rho RT_0}{\mathrm{M}p_0}\approx 40h$, где $\delta = \dfrac{c(T-T_0)}{r}$ – доля воды, перешедшей в парообразное состояние, $T_0 = 100$ °С – температура кипения воды при атмосферном давлении p_0, ρ – плотность воды, М – молярная масса воды.
5. $\Delta E = \dfrac{q^2d}{2\varepsilon_0S}\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$. **6.** $\tau\sim 10^{-10}$ с. **7.** $t\approx 20$ °С.

Устный командный тур

МАТЕМАТИКА

1. Составное. *Указание.* $2^{10} + 5^{12} = \left(2^5+5^6\right)^2 - 2^6\cdot 5^6$. **2.** 7.
3. Можно. *Указание*. Воспользуйтесь тем, что при $k\in\boldsymbol{N}$ $k^2-(k+1)^2-(k+2)^2+(k+3)^2 = 4$.
4. 2500; 324; 100. *Указание.* Докажите, что сторона k сотого квадрата – целое число. Пусть n – сторона исходного квадрата. Тогда $n^2 - k^2 = 99$.
5. $1/4$. *Указание.* Положите $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$.
6. Можно. **7.** 1,125.

ФИЗИКА

1. В процессе движения шарика над горизонтальной поверхностью происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию тяготения и обратно. При ударе происходит переход кинетической энергии в потенциальную энергию упругой деформации и обратно. Оба процесса сопровождаются потерями механической энергии шарика в результате действия сил вязкого трения и возбуждения акустических волн в шарике и поверхности, а также вследствие того, что деформация шарика и поверхности не может быть абсолютно упругой. См. рис.17.

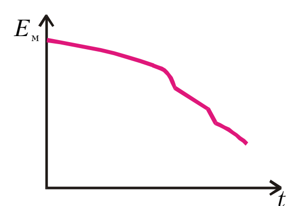

Рис. 17

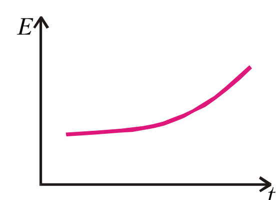

Рис. 18

2. nF; уменьшится в n раз.
3. Да. Например, в случае протяженных заряженных тел, когда один из зарядов значительно больше другого.
4. Воздух хорошо растворяется в нефти и заметно уменьшает ее плотность. Это приводит к тому, что даже ослабленного давления подземных пластов оказывается вполне достаточно для того, чтобы заглохшие скважины вновь зафонтанировали.
5. ЭДС индукции максимальна, когда плоскость рамки перпендикулярна проводнику с током, и минимальна, когда они параллельны.
6. Да. Например, если источник света движется быстрее человека и параллельно ему и экрану. Проще всего рассмотреть этот эффект в системе отсчета бегущего человека. Если скорость источника света V, а человека v, то скорость тени относительно человека $v_0 = h(V-v)/(H-h)$, где h и H – расстояния от человека и источника света до экрана.
7. См. рис.18. (Подробно об этом можно прочитать в статье А.Митрофанова «Аэродинамический парадокс спутника» в этом номере журнала. *Прим.ред.*)

История научных идей и открытий

МАТЕМАТИКА

1. Л.В.Канторович. **2.** Л.Эйлер.
3. Трисекция угла, удвоение куба, квадратура круга (решены в XIX веке).
4. Возникновение аксиоматического метода, появление теории множеств.
5. Два наиболее известных примера – уравнение Пелля и формула Кардано. Задолго до Пелля, малоизвестного английского математика, это уравнение изучил Ферма. Формула Кардано была открыла до Кардано итальянским математиком Тартальей.

ФИЗИКА

1. «Падающая башня» находится в городе Пизе в Италии. На ней в конце XVI века Галилео Галилей проводил свои знаменитые опыты по изучению движения падающих тел. В частности, он установил, что при падении с одной высоты скорость падения как легкого, так и тяжелого тела одна и та же.
2. Французский ученый Пьер Лаплас в 1798 году опубликовал статью, в которой рассчитал параметры небесного тела, поле тяготения которого не выпускает даже свет.
3. Вильгельм Конрад Рентген в 1901 году стал первым Нобелевским лауреатом по физике «за открытие лучей, названных его именем (рентгеновских лучей)».
4. Это – Мухаммед Тарагай Улугбек, правитель Самарканда в первой половине XV века.
5. 4 октября 1957 года в СССР был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. Он был создан в КБ под руководством С.П.Королева и имел массу 83,6 кг.

II МЕЖДУНАРОДНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

Теоретический тур

8—10 классы

1. Разница в видимом блеске этих звезд: $1000^2 = 1000000 = 100 \cdot 100 \cdot 100$ раз, или в видимых звездных величинах: $5^m + 5^m + 5^m = 15^m$. Звездная величина удаленной звезды, естественно, больше. (За это стандартное решение ставилось 8 баллов.) Следует заметить, что при удалении звезды в 1000 раз, возможно, следует учитывать поглощение света от нее межзвездной средой, т.е. разница будет больше 15 звездных величин (+2 балла).
2. Наблюдатель увидел бы Землю, по которой ползет маленький кружок полной тени от Луны диаметром около 200 км или $2''$, вокруг которой — полутень (область частного солнечного затмения). При этом Соловецкие острова находятся на краю видимого диска Земли, слева вверху (если верхом считать направление на Северный полюс); земная ось повернута к наблюдателю так, что Северный Ледовитый океан полностью виден.
Вопрос о том, увидел ли бы наблюдатель именно кружок полной тени, сильно зависит от условий видимости. На достаточно монотонном фоне облаков кружок был бы отчетливо виден; в отсутствие облаков при движении тени «по лесам, полям и рекам» увидеть темный кружок диаметром около двух угловых секунд довольно сложно.
3. Примерно на две с небольшим минуты, поскольку лишние звездные сутки набегают (по сравнению с солнечными) за 1 марсианский год: $24\ (1 + 2{,}5\%/100\%)\big/687 \approx 2{,}1$ мин.
4. За 40 земных лет Венера совершила почти ровно 65 оборотов вокруг Солнца, т.е. 40 лет назад она тоже была вблизи положения восточной элонгации. Учитывая, что вблизи этого положения расположение Венеры относительно Солнца на нашем небе меняется очень медленно, а координаты Солнца 4 октября 1957 года и 4 октября 1997 года в точности одни и те же, можно с уверенностью сказать, что 40 лет назад координаты Венеры были практически теми же самыми: $\alpha = 15^h 20^m$, $\delta = -22°$.
5. Звезды ковша Большой Медведицы находятся на расстоянии около 25 пк и имеют видимую звездную величину порядка 2^m, Сириус находится на расстоянии 2,66 пк от Солнца. Поэтому при перемещении с Земли в окрестность Сириуса видимые звездные величины звезд ковша практически не изменятся, а звездная величина Солнца составит около 2^m. Таким образом, некоторые звезды ковша будут светить ярче Солнца, некоторые — слабее.
6. В Кито (на экваторе) Солнце в Зените можно видеть не более 4 дней в году, т.е. по 2 дня вблизи каждого из дней равноденствия. В это время изменение склонения Солнца очень большое: $23 - 24'$ в сутки; это означает, что если сегодня Солнце закрывает Зенит своим диском (диаметр диска равен $32'$), то уже послезавтра этого явно не произойдет. В Сан-Паулу (на тропике) Солнце находится в Зените только в дни зимнего солнцестояния, но зато изменение склонения Солнца незначительное и событие может имеет место 16, а изредка даже 17 дней в году.

11—12 классы

1. Из-за красного смещения, которое имеет место при наблюдении удаляющейся звезды, пик спектрального распределения смещается в сторону больших длин волн. Следовательно, звезда будет казаться холоднее (8 баллов). Следует добавить, что температура звезд определяется не только положением максимума в излучении, но и положением спектральных линий. Поэтому детальное изучение спектра позволяет вычислить как истинную температуру звезд, так и скорость удаления (+2 балла).
3. Объем каждой из половинок звезды будет равен половине первоначального, радиус будет меньше в $2^{1/3}$ раза, площадь поверхности – в $2^{2/3}$ раза. Поскольку половинок две, общая их площадь составит $2 \cdot 2^{-2/3} = 2^{1/3}$ первоначальной. При неизменной температуре поверхности звезд изменение звездной величины составит $-5/2 \cdot \lg 2^{1/3} \approx -5/6 \cdot \lg 2 \approx 0{,}25$ (8 баллов). Заметим, что одна звезда может закрывать наблюдателю другую, в этом случае звездная величина системы становится больше – максимально до +0,5 по сравнению с первоначальной (+2 балла).
6. Теоретическая разрешающая способность идеального объектива определяется только длиной волны принимаемого излучения и диаметром объектива: $\alpha_т = 1{,}22\lambda/D$ (в радианах). Для шестиметрового зеркала и $\lambda \approx 500$ нм это дает $\alpha_т \approx 10^{-7}$ рад $\approx 0{,}02''$. Однако, это совсем не ответ на поставленный в задаче вопрос. Реальная (практическая) разрешающая способность БТА ограничена атмосферными условиями и качеством поверхности зеркала, и она не лучше чем $(0{,}7 - 0{,}9)''$. Чисто дифракционное ограничение $(1{,}22\lambda/D)$ практически никакой роли здесь не играет.

Практический тур

В предложенных спектрах (они были взяты из спектральных атласов) есть линии поглощения кислорода земной атмосферы – они не смещены во всех трех спектрах. В солнечном спектре не смещены также и линии поглощения, образовавшиеся на Солнце, — это говорит о том, что нет лучевой составляющей скорости движения Земли по орбите вокруг Солнца (как и следовало ожидать).
а) В спектре αBoo (Арктур) заметно небольшое красное сме-

щение — эффект Доплера указывает на взаимное удаление Земли и αBoo. В спектре αCMi (Процион) видно существенно более сильное синее смещение линий – значит, Земля и αCMi взаимно приближаются.

б) У Арктура все линии поглощения дают одинаковую величину $\Delta\lambda \approx +0{,}06$ Å. Все линии Процiона дают также одинаковые $\Delta\lambda \approx -0{,}55$ Å. По формуле Доплера $\Delta\lambda/\lambda_0 = V_r/c$, где $\lambda_0 \approx 6300$ Å, а $c = 3\cdot 10^5$ км/с, получаем

$$V_г(\alpha\mathrm{Boo}) \approx 2{,}9 \text{ км/с}, \; V_г(\alpha\mathrm{CMi}) \approx -26{,}2 \text{ км/с}.$$

в) Проще всего построить гелиоцентрическую схему в проекции на плоскость небесного экватора, так как с помощью карты звездного неба можно непосредственно найти прямое восхождение звезд, а также положение Солнца на эклиптике в любой день года. В других системах координат это сделать сложнее – придется пересчитывать все координаты.

Считая от точки весеннего равноденствия (γ), на которую проецируется Солнце 21 марта, находим (рис.19) направление на Арктур:

$$\alpha(\alpha\mathrm{Boo}) = 14^{\mathrm{h}}12^{\mathrm{m}} = 213^\circ$$

и направление на Процион:

$$\alpha(\alpha\mathrm{CMi}) = 7^{\mathrm{h}}36^{\mathrm{m}} = 114^\circ.$$

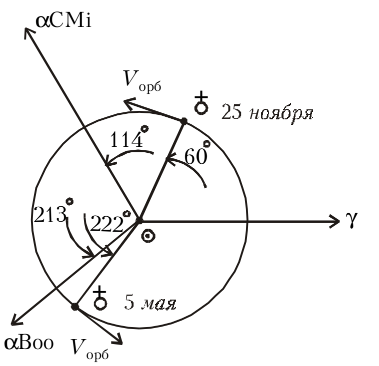

Рис. 19

Направления на Землю относительно Солнца противоположны направлениям на Солнце относительно Земли, т.е. $\beta = \alpha(\odot) + 180°$. Поэтому для 5 мая: $\alpha(\odot) = 2^{\mathrm{h}}48^{\mathrm{m}} = 42°$, $\beta = 42° + 180 = 222°$, а направление движения Земли – на точку $222° + 90° = 312°$. Соответственно, для 25 ноября: $\beta = 60°$, а направление движения Земли – на точку 150°.

г) Построив кинематическую схему взаимного движения Солнца, Земли и звезд, нетрудно понять, что делать оценку орбитальной скорости движения Земли $V_{орб}$ следует по формуле

$$V_г = V_с - V_{орб}\cos\delta,$$

где $V_г$ и $V_с$ — гео- и гелиоцентрические скорости звезд, δ — угол между вектором скорости Земли и направлением на звезду. Рассматривая движение только в плоскости небесного экватора, для каждой из звезд записываем

$$V_г(\alpha\mathrm{Boo}) = V_с(\alpha\mathrm{Boo}) - V_{орб}\cos\left(312^\circ - 213^\circ\right),$$

$$V_г(\alpha\mathrm{CMi}) = V_с(\alpha\mathrm{CMi}) - V_{орб}\cos\left(114^\circ - 150^\circ\right).$$

Из первого уравнения находим $V_{орб} \approx 53$ км/с, из второго — $V_{орб} \approx 33$ км/с. Полученные результаты, естественно, не точные – главным образом потому, что вместо истинных углов δ мы фактически брали их проекции на плоскость небесного экватора.

МОСКОВСКАЯ ОЛИМПИАДА СТУДЕНТОВ ПО ФИЗИКЕ

1. $E = \sqrt{N}\,Q/(4\pi\varepsilon_0 R)$. **2.** $\Delta S = \dfrac{pV}{3T}\ln\dfrac{32}{27}$.

3. $r = \dfrac{\left(v_0^2 + \omega^2 R^2\right)^{3/2}}{\omega R\left(g - \omega^2 R\right)}$. **4.** $x = 0{,}25\mu/a$. **5.** $F_2 = 3\pi R^3 L_1 F_1/\left(2L_2^4\right)$.

6. $f = \varepsilon_0 E_0^2\left(\varepsilon^2 - 1\right)/\left(2\varepsilon^2\right)$.

7. $A = mgL\cos\alpha$, при этом нить нужно подтягивать в крайних положениях, не изменяя амплитуду колебаний.

8. $R = \dfrac{mv_0}{\sqrt{r^2 + q^2B^2}}$. **9.** $F = qQ/\left(8\pi\varepsilon_0 R^2\right)$. **10.** $F = I_0\pi R^2/c$.

КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

(см. «Квант» №2)

Ответ: место/номер дорожки – 1/2, 2/7, 3/5, 4/8, 5/6, 6/4, 7/1, 8/3.

КОНКУРС В СЕТИ ИНТЕРНЕТ

1. Заметим, что при положительных значениях параметра c корни уравнения

$$x^2 - 4x + 4 - c = 0 \qquad (1)$$

– вещественные числа: $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{c}$, причем

$$x_1 + x_2 = 4, \qquad (2)$$

$$x_1 x_2 = 4 - c. \qquad (3)$$

На первом шаге можно получить числа 1 и 3. При $c = 3$ получим корни $x_1^{(0)} = 2 + \sqrt{3}$; $x_2^{(0)} = 2 - \sqrt{3}$. Построим множество чисел $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_1^{(1995)}$ по следующему правилу:

$$x_1^{(k)} = 2 + \sqrt{x_1^{(k-1)}}, \; k = 1, 2, \ldots 1995 \qquad (4)$$

(число $x_1^{(k)}$ — большее из двух чисел $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, получающихся на выходе генератора (1), если на его вход подать число $x_1^{(k-1)}$). Покажем, что $x_1^{(0)}\cdot x_1^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_1^{(1995)}\cdot x_2^{(1995)} = 1$. В силу (4), (3) и (2) $x_1^{(k)}x_2^{(k)} = 4 - x_1^{(k-1)} = x_2^{(k-1)}$, поэтому

$$x_1^{(0)}\cdot x_1^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_1^{(1995)}\cdot x_2^{(1995)} = x_1^{(0)}\cdot x_1^{(1)}\cdot\ldots\cdot x_1^{(1994)}\cdot x_2^{(1994)} = \ldots$$

$$\ldots = x_1^{(0)}\cdot x_2^{(0)} = 1.$$

Все числа $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}$ различны в силу неравенств $x_2^{(1995)} < 2 < x_1^{(0)} < x_1^{(1)} < \ldots < x_1^{(1995)}$ и поэтому полностью удовлетворяют требованиям задачи.

Примечание. Решение задачи не единственно. В качестве начального числа $x_1^{(0)}$ можно взять один из двух корней $2 + \sqrt{3}$ или $2 - \sqrt{3}$, и далее находить следующие числа по любой из двух формул: $x_1^{(k)} = 2 - \sqrt{x_1^{(k-1)}}$ или $x_1^{(k)} = 2 + \sqrt{x_1^{(k-1)}}$. Таким образом, можно указать 2^{1995} различных наборов чисел $\{x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}\}$, произведение которых равно 1. (Если к тому же учесть, что кроме этих наборов могут быть также наборы $\{1, x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(1994)}, x_2^{(1994)}\}$, то всего различных вариантов решений $3\cdot 2^{1994}$).

Можно доказать, что и в общем случае числа $x_1^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(1995)}, x_2^{(1995)}$ попарно различны, но, в отличие от рассмотренного в нашем решении специального случая, сделать это уже не так просто.

2. Очевидно, что если взять какое-то количество одинаковых слагаемых, то их сумма будет кратной этому количеству. Неожиданным представляется следующий факт: если взять $m - 1$ ($m > 1$ – натуральное число) *не обязательно равных* между собой натуральных степеней числа m, то их сумма будет кратной числу $m - 1$. Доказательство этого факта основывается на многократном применении формулы

$$m^k - 1 = (m-1)\left(m^{k-1} + m^{k-2} + \ldots + m + 1\right)$$

(k – натуральное число) к тождеству

$$m^{k_1}+m^{k_2}+\ldots+m^{k_n}=n+\left(m^{k_1}-1\right)+\left(m^{k_2}-1\right)+\ldots+\left(m^{k_n}-1\right)$$

(здесь k_1, k_2, ..., k_n — натуральные числа). Поскольку в последнем тождестве в скобках стоят числа, кратные $m-1$, то и вся сумма будет кратной $m-1$, если n кратно $m-1$.

Рассмотрим теперь сумму $s=\sum\limits_{i=0}^{k(m-1)-1} m^{in}$, где k, n – натуральные числа. Поскольку эта сумма объединяет $k(m-1)$ слагаемых натуральных степеней числа m, то она кратна числу $m-1$: $s=N\cdot(m-1)$ (N — натуральное число). С другой стороны, как сумма геометрической прогрессии она равна $s=\dfrac{m^{nk(m-1)}-1}{m^n-1}$, поэтому $m^{nk(m-1)}-1=N(m-1)\left(m^n-1\right)$, т.е. число $m^{nk(m-1)}-1$ кратно числу $(m-1)\left(m^n-1\right)$. Утверждение задачи получается отсюда при $m=1997$, $n=2000$, $k=5$.

3. Номер пункта a_i после i-го прыжка ($i=1, 2, \ldots$) кузнечика определяется по следующей формуле:

$$\begin{cases} a_i=a_0+i\Delta-Nk, & \text{если } k \text{ – четное;}\\ a_i=(k+1)N-a_0-i\Delta, & \text{если } k \text{ – нечетное,}\end{cases} \qquad (*)$$

где a_i — номер пункта старта кузнечика ($a_0=1$); N – максимальный номер пункта на ленте Мебиуса ($N=1997$); Δ — длина прыжка кузнечика (для кузнечика Пети $\Delta=100$, для кузнечика Васи $\Delta=150$); $k=\left[\dfrac{1+i\Delta}{N}\right]$ — индикатор возрастания или убывания нумерации пунктов при выполнении i-го прыжка (квадратные скобки здесь обозначают функцию «целая часть»: $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее x).

Решая совокупность (∗) неопределенных уравнений в целых числах относительно целых неизвестных i, k при $a_i=1$, находим для кузнечика Пети наименьшее натуральное значение $i=1318$ (при этом $k=15$). Следовательно, кузнечик Вася первым окажется в пункте с номером 1.

4. Одно из возможных решений задачи показано на рисунке 20.

5. Предварительно отметим, что в любой треугольник, вершины которого совпадают с центрами трех кругов радиуса 1, можно поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2.

Построим внутри равностороннего треугольника ABC равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы его стороны были

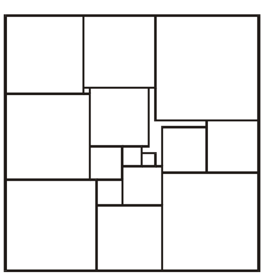

Рис. 20

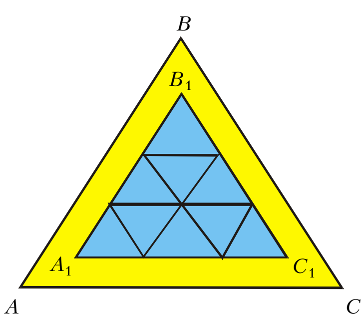

Рис. 21

на 1 удалены от сторон треугольника ABC, и, проведя параллельные линии, разделим треугольник $A_1B_1C_1$ на 9 одинаковых треугольных ячеек (рис.21). Предположим, длина стороны треугольной ячейки меньше 2. Покажем, что в этом случае в три соседние ячейки, образующие трапецию, нельзя поместить равносторонний треугольник с длиной стороны 2. Если бы это удалось сделать, то среди сторон такого треугольника не нашлось бы сто-

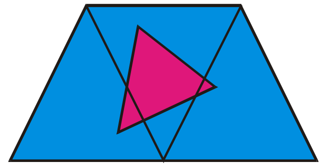

Рис. 22

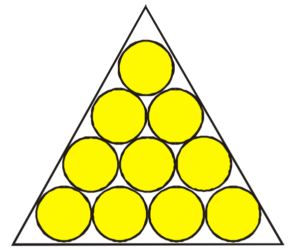

Рис. 23

рон, параллельных сторонам трапеции (рис.22), причем одна из сторон треугольника должна была бы образовать с основанием трапеции угол, больший 60°. Но в этом случае она была бы меньше боковой стороны трапеции. Противоречие.

Итак, поскольку $\Delta A_1B_1C_1$ содержит не менее 9 центров кругов радиуса 1, то либо каждая из ячеек содержит какой-нибудь центр круга, либо в одной из ячеек содержится два центра. И в том, и в другом случае сторона ячейки не может быть меньше 2. На рисунке 23 показано расположение 10 кругов, когда стороны ячеек имеют длину 2.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

А.Н.Балдин, В.А.Иванюк, А.Е.Пацхверия, М.М.Константинова, Д.Н.Гришукова, П.И.Чернуский, С.Б.Шехов

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

Е.А.Митченко, Л.В.Осипова

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант», тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени Чеховском полиграфическом комбинате Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Заказ №