Поле заряженной плоскости

Д.АЛЕКСАНДРОВ

Какое поле создает равномерно заряженная плоскость? Ясно, что вблизи – однородное, а очень далеко – похожее на поле точечного заряда. Например, для поля на оси равномерно заряженного плоского диска радиусом R зависимость $E_д(h)$ можно ожидать примерно такую, как показано на ри-

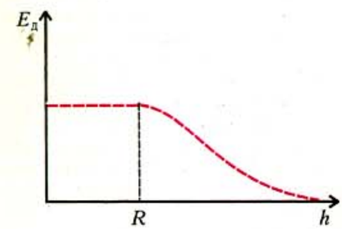

Рис. 1

сунке 1. А какое поле будет тогда снаружи плоского конденсатора, т.е. системы двух стоящих рядом пластин (дисков), равномерно заряженных одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами?

Чтобы найти $E_к(h)$, нужно, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить поля двух пластин. Так, поле на расстоянии h от ближней пластины равно разности (так как заряды пластин разных знаков) полей $E(h)$ и $E(h+d)$, где d – расстояние между пластинами. Если $d \ll R$, как это обычно и бывает у плоского конденсатора, разность можно заменить производной:

$$E_к(h) = E(h+d) - E(h) = E'(h) \cdot d .$$

График ожидаемой зависимости $E_к(h)$ приведен на рисунке 2.

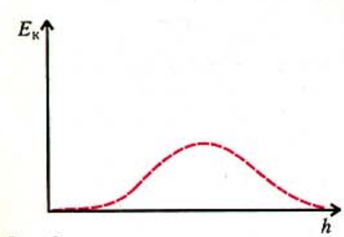

Рис. 2

Поле конденсатора максимально там, где поле одной пластины меняется наиболее быстро. Но, с другой стороны, силовые линии поля снаружи конденсатора выходят перпендикулярно пластинам и далее могут только расходиться (рис.3). Поэтому напряженность должна монотонно убывать и не может иметь максимума.

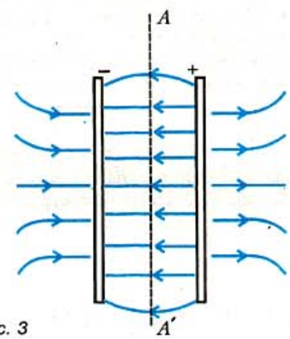

Рис. 3

Полученное противоречие заставляет более аккуратно рассмотреть поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью. Лучше всего его честно посчитать.

Возьмем равномерно заряженный диск радиусом R и найдем поле на его оси, воспользовавшись принципом суперпозиции. Маленький кусочек диска площадью ΔS имеет заряд $\sigma\Delta S$ и создает в точке наблюдения поле $\Delta E = k\sigma\Delta S/l^2$ (рис.4). Ясно, что в окончательный результат дает вклад только перпендикулярная составляющая поля, поэтому будем учитывать толь-

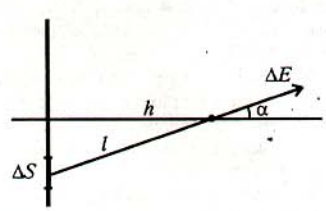

Рис. 4

ко ее:

$$\Delta E_{\perp} = \Delta E \cos\alpha = \frac{k\sigma\Delta S \cos\alpha}{l^2} .$$

Если вы знаете, что такое телесный угол, то заметите, что $(\Delta S \cos\alpha)/l^2$ как раз равно телесному углу, под которым виден кусочек ΔS из точки наблюдения; следовательно, суммарное поле равно телесному углу, под которым виден весь диск, умноженному на $k\sigma$.

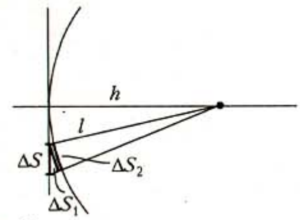

Рис. 5

Для тех, кто не знаком с телесным углом, сделаем следующее.

Проведем сферу с центром в точке наблюдения и касающуюся диска (рис.5). Тогда поле $\Delta E_{\perp}$ можно выразить следующим образом:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{k\sigma\Delta S\cos\alpha}{l^2} = k\sigma\frac{\Delta S_1}{l^2} = k\sigma\frac{\Delta S_2}{h^2} ,$$

где $\Delta S_1 = \Delta S\cos\alpha$ и $\Delta S_2 = \Delta S_1\frac{h^2}{l^2}$. Просуммировав по всем кусочкам, получим, что полное поле равно $k\sigma S/h^2$, где S – площадь, вырезаемая из нашей сферы конусом с вершиной в точке наблюдения и диском в качестве основания. Найдите самостоятельно эту площадь и убедитесь, что

$$S = 2\pi h^2(1-\cos\alpha) = 2\pi h^2\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right),$$

а значит,

$$E = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right).$$

Проверьте также, что при $h \gg R$ эта формула переходит в такую:

$$E = k\frac{\pi R^2\sigma}{h^2} .$$

Из графика на рисунке 6, где изображена найденная зависимость $E(h)$, видно, что поле вблизи пластины меняется быстрее всего, т.е. в каком-то смысле оказывается наиболее неоднородным.

Теперь нетрудно найти и поле снаружи конденсатора. Будем считать, что

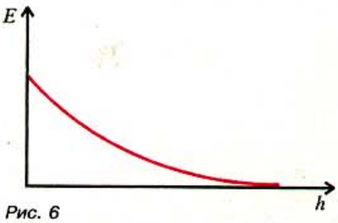

Рис. 6

$d \ll R$. Тогда

$$E_к = E(h) - E(h+d) =$$
$$= -E'(h) \cdot d = \frac{2\pi k\sigma R^2 d}{\left(h^2 + R^2\right)^{3/2}}.$$

При $h \ll R$

$$E_к = 2\pi k\sigma \frac{d}{R} = E_{внутри} \frac{d}{2R}, \quad (*)$$

т.е. поле действительно мало.

Раз на внешних сторонах пластин начинаются и заканчиваются силовые линии, там должны быть заряды. Формула (*) позволяет найти связь между поверхностными плотностями заряда на внутренней и внешней сторонах пластины:

$$\sigma_{снаружи} = \sigma_{внутри} \frac{d}{2R}.$$

Отсюда также следует, что реальная емкость плоского конденсатора больше, чем дает пренебрегающая краевыми эффектами формула $C = S/(4\pi kd)$, так как эффективная площадь пластин больше S из-за того, что у них работают еще и внешние стороны.

Теперь поговорим о потенциале. Если, скажем, конденсатор заряжен до разности потенциалов U, то чему равны потенциалы пластин относительно бесконечности?

При обсуждении подобных вопросов полезен следующий факт: у симметричного конденсатора (пластины одинаковой формы, стоящие параллельно) потенциал точки посередине между пластинами равен потенциалу бесконечности. В этом можно убедиться, посмотрев на картину силовых линий поля конденсатора (см. рис.3). Из симметрии очевидно, что уходящая в бесконечность плоскость AA' всюду перпендикулярна силовым линиям и поэтому является эквипотенциальной поверхностью. (Предполагается, что кроме конденсатора никаких зарядов во вселенной нет.) Потенциалы пластин относительно бесконечности совпадают, таким образом, с потенциалами пластин относительно середины конденсатора, т.е. они равны $\pm U/2$.

Если от внешней стороны отрицательной пластины заряженного до напряжения U конденсатора отрывается электрон, то его скорость в бесконечности можно найти из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e\frac{U}{2}$$

(начальной скоростью электрона пренебрегаем). Эта простая задача дает пример ситуации, когда принципиально нельзя пренебречь краевыми эффектами.

В заключение заметим, что поле снаружи и заряд на внешней стороне обкладок — неприятности не только плоского конденсатора. Легко показать, что любой заряженный конденсатор создает вокруг себя поле и, следовательно, имеет заряды на внешних сторонах обкладок, так как силовым линиям нужно где-то начинаться и заканчиваться. В самом деле, работа электростатического поля при переносе заряда с одной клеммы на другую не зависит от маршрута. Перенося заряд как вне конденсатора, так и внутри его, мы получим одинаковые работы. Поэтому, если поле есть внутри конденсатора, то оно есть и снаружи. Можно, конечно, попытаться «запереть» поле, например, между двумя сферами. Но чтобы эта система стала конденсатором, нужно иметь возможность подключаться к внутренней сфере. Придется сверлить дырочку, через которую поле и заряд вырвутся наружу. Так что ничего у нас не получится.