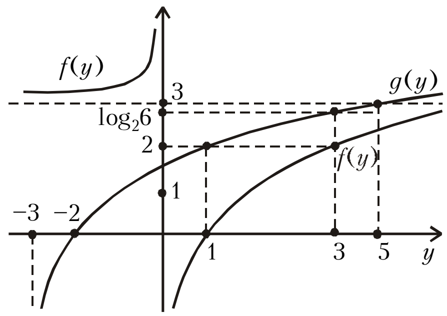

при $y \in (-3;0)$:

$$g(y) < 3 < f(y)\ ;$$

при $y \in (0;1]$:

$$f(y) \le f(1) = 0 < \log_2 3 = g(0) < g(y)\ ;$$

при $y \in (1;3]$:

$$f(y) \le f(3) = 2 = \log_2 4 = g(1) < g(y)\ ;$$

при $y \in (3;5]$:

$$f(y) \le f(5) = 12/5 < \log_2 6 = g(3) < g(y)\ ;$$

при $y \in (5;\infty)$:

$$f(y) < 3 = g(5) \le g(y)\ .$$

Из всех написанных не вполне очевидно лишь числовое неравенство

$$12/5 < \log_2 6 = \log_2 3 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7/5 < \log_2 3 \Leftrightarrow 2^7 < 3^5 \Leftrightarrow 128 < 243\ .$$

Итак, соответствующее неравенству уравнение не имеет решений. Это означает, что любой из промежутков области определения может войти в ответ только целиком. Тем самым остается выбрать по точке в каждом из трех интервалов $(-3;\ 0)$, $(0;\ 1)$, $(1;\ \infty)$ области определения и проверить выполнение неравенства в каждой из них. Подставив, например, $y = -1$, $y = 1/2$, $y = 7$, убедимся, что неравенство выполнено лишь при $y = 1/2$ и, следовательно, только на промежутке $(0;\ 1)$.

Вернувшись к старой переменной $x = (y-1)/2$, получим

Ответ: $(-1/2;\ 0)$.

Иногда возникшие в примере 9 сложности удается обойти за счет преобразования уравнения.

Пример 10. *Решите уравнение*

$$x^2 - x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1}\ .$$

Решение. Уравнение определено при $x \ge 1/2$. При таких значениях x левая и правая части уравнения являются обе возрастающими функциями, что затрудняет исследование взаимного расположения их графиков.

Вычтем x из обеих частей уравнения:

$$x^2 - 2x + 2 = 2\sqrt[4]{2x-1} - x\ .$$

Введем в рассмотрение функции

$$f(x) = x^2 - 2x + 2\ ,$$

$$g(x) = 2\sqrt[4]{2x-1} - x\ .$$

Графиком $f(x)$ является парабола с минимальным значением $f(1) = 1$. Для исследования поведения $g(x)$ вычислим

$$g'(x) = (2x-1)^{-3/4} - 1\ .$$

Производная $g'(x)$ обращается в ноль при $x = 1$ и при проходе через эту точку меняет знак с «+» на «−». Последнее означает, что в точке $x = 1$ функция $g(x)$ достигает своего наибольшего значения $g(1) = 1$. Итак, минимум левой части уравнения совпал с максимумом его правой части. Тем самым равенство возможно лишь при $x = 1$.

Ответ: 1.

В заключение попробуем ответить на естественный вопрос: как угадать, что уравнение, неравенство или система «не решается»? Рассмотренные примеры подсказывают ответ: исследование поведения функций может в любом случае оказаться существенной частью решения задачи. В процессе поиска удобной для такого исследования формы трудно пройти мимо стандартных способов решения, если, конечно, таковые существуют.

Упражнения

Решите уравнение, неравенство или систему:

1. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2} + (x-y)^2$.

2. (МГУ, химфак, 89)

$$(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right) + x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right) = 0\ .$$

3. (МГУ, ВМК, 89) Найдите все значения a, при которых уравнение имеет хотя бы одно целочисленное решение:

$$\log_{1/\pi}\left(\frac{a^2+4\pi^2+4}{4x-x^2-2(a-2\pi)|x|+4\pi a}\right) - \sqrt{(x-5a+10\pi-34)(|\pi-x|-a+\pi+2)} = 0\ .$$

4. (МГУ, ф-т почвоведения, 89)

$$\left(x^2-4x+3\right)\times\log_{1/\sqrt{2}}\left(\cos^2(\pi x)+\cos x+2\sin^2\frac{x}{2}\right) \ge 2\ .$$

5. (МГУ, геол. ф-т, 92) Найдите все тройки чисел $(x,\ y,\ z)$, удовлетворяющие уравнению

$$x^2 - 2x\sin(\pi y) + 1 + \sqrt{yz-2z^2-64} = (41-yz)\left(\cos(2\pi y)+\cos(\pi z)\right)^2\ .$$

6. $\left(\sin^{11}x + \cos^{11}x\right)\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right) = 1$.

7. $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

8. $2x^9 - x^5 + x > 2$.

9. $8^x(3x+1) = 4$.

10. $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

11. $1 + 2\cdot 2^x + 3\cdot 3^x < 6^x$.

12. $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1; \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$

13. Для $x, y \in (-\pi/2;\pi/2)$ решите систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = x - y, \\ \sin x + \sin y = \sqrt{2}. \end{cases}$$

14. $\left(4^x+2\right)(2-x) = 6$.

15. $\log_5\left(1+\sqrt{4x}\right) > \log_{16}(4x)$.

16. (МГУ, мехмат, 79)

$$\frac{2+\log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}\ .$$

17. (МГУ, хим. ф-т, 78) При $x \le 2$ решите систему

$$\begin{cases} (2-x)(3x-2z) = 3-z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ z^2 + y^2 = 6z. \end{cases}$$

18. $\begin{cases} x^2 + 2x + \sqrt{x-y} = 0, \\ y^2 - \sqrt{x-y-1} = 4. \end{cases}$

19. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{2}$.

20. $2x^6 - x^5 + x - 2 \le 0$.

21. (МГУ, ф-т почвоведения, 81) Найдите все пары $(x,\ y)$, для каждой из которых выполнено равенство

$$3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\left(\frac{x+y}{2}\right) + 2\cos(x+y) = \frac{13}{4} + \cos^2(x+y)\ .$$

22. (МГУ, геогр. ф-т, 81)

$$\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

23. (МГУ, геол. ф-т, 85)

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 10 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + \sqrt{x+2}\ .$$

24. (МГУ, ВМК, 83)

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2x - 6\sin x\cos x - 9\cos^2x + 3\sqrt[3]{33}\right) = \arcsin^2 x + \arccos^2 x - 5\pi^2/4\ .$$