Поле заряженной плоскости

Д.АЛЕКСАНДРОВ

Какое поле создает равномерно заряженная плоскость? Ясно, что вблизи — однородное, а очень далеко — похожее на поле точечного заряда. Например, для поля на оси равномерно заряженного плоского диска радиусом R зависимость $E_д(h)$ можно ожидать примерно такую, как показано на ри-

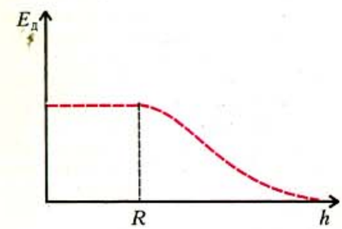

Рис. 1

сунке 1. А какое поле будет тогда снаружи плоского конденсатора, т.е. системы двух стоящих рядом пластин (дисков), равномерно заряженных одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами?

Чтобы найти $E_к(h)$, нужно, в соответствии с принципом суперпозиции, сложить поля двух пластин. Так, поле на расстоянии h от ближней пластины равно разности (так как заряды пластин разных знаков) полей $E(h)$ и $E(h+d)$, где d — расстояние между пластинами. Если $d \ll R$, как это обычно и бывает у плоского конденсатора, разность можно заменить производной:

$$E_к(h) = E(h+d) - E(h) = E'(h) \cdot d .$$

График ожидаемой зависимости $E_к(h)$ приведен на рисунке 2.

Рис. 2

Поле конденсатора максимально там, где поле одной пластины меняется наиболее быстро. Но, с другой стороны, силовые линии поля снаружи конденсатора выходят перпендикулярно пластинам и далее могут только расходиться (рис.3). Поэтому напряженность должна монотонно убывать и не может иметь максимума.

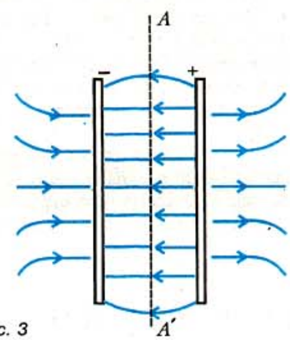

Рис. 3

Полученное противоречие заставляет более аккуратно рассмотреть поле, создаваемое равномерно заряженной плоскостью. Лучше всего его честно посчитать.

Возьмем равномерно заряженный диск радиусом R и найдем поле на его оси, воспользовавшись принципом суперпозиции. Маленький кусочек диска площадью ΔS имеет заряд $\sigma\Delta S$ и создает в точке наблюдения поле $\Delta E = k\sigma\Delta S/l^2$ (рис.4). Ясно, что в окончательный результат дает вклад только перпендикулярная составляющая поля, поэтому будем учитывать только ее:

$$\Delta E_{\perp} = \Delta E \cos\alpha = \frac{k\sigma\Delta S\cos\alpha}{l^2} .$$

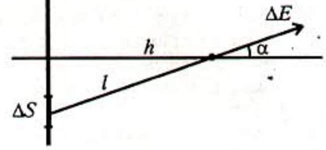

Рис. 4

Если вы знаете, что такое телесный угол, то заметите, что $(\Delta S\cos\alpha)/l^2$ как раз равно телесному углу, под которым виден кусочек ΔS из точки наблюдения; следовательно, суммарное поле равно телесному углу, под которым виден весь диск, умноженному на $k\sigma$.

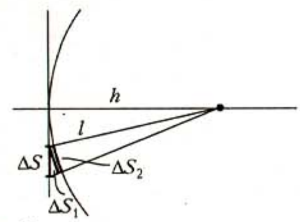

Рис. 5

Для тех, кто не знаком с телесным углом, сделаем следующее.

Проведем сферу с центром в точке наблюдения и касающуюся диска (рис.5). Тогда поле $\Delta E_{\perp}$ можно выразить следующим образом:

$$\Delta E_{\perp} = \frac{k\sigma\Delta S\cos\alpha}{l^2} = k\sigma\frac{\Delta S_1}{l^2} = k\sigma\frac{\Delta S_2}{h^2} ,$$

где $\Delta S_1 = \Delta S\cos\alpha$ и $\Delta S_2 = \Delta S_1\dfrac{h^2}{l^2}$. Просуммировав по всем кусочкам, получим, что полное поле равно $k\sigma S/h^2$, где S — площадь, вырезаемая из нашей сферы конусом с вершиной в точке наблюдения и диском в качестве основания. Найдите самостоятельно эту площадь и убедитесь, что

$$S = 2\pi h^2(1-\cos\alpha) = 2\pi h^2\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right),$$

а значит,

$$E = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+R^2}}\right).$$

Проверьте также, что при $h \gg R$ эта формула переходит в такую:

$$E = k\frac{\pi R^2\sigma}{h^2} .$$

Из графика на рисунке 6, где изображена найденная зависимость $E(h)$, видно, что поле вблизи пластины меняется быстрее всего, т.е. в каком-то смысле оказывается наиболее неоднородным.

Теперь нетрудно найти и поле снаружи конденсатора. Будем считать, что