О вписанно-описанных многоугольниках

А.ЗАСЛАВСКИЙ

В КНИГАХ по элементарной геометрии достаточно часто встречаются задачи о вписанных или описанных четырехугольниках. Существенно более редкими являются задачи о четырехугольниках, являющихся вписанными и описанными одновременно. Сведения же о вписанно-описанных многоугольниках с большим числом сторон ограничиваются, пожалуй, *теоремой Понселе*. Приведем ее формулировку:

Пусть окружность β лежит внутри окружности α. Из точки A окружности α проведем касательную к окружности β и найдем вторую точку A_1 ее пересечения с α. Из точки A_1 проведем касательную к β и найдем вторую точку A_2 ее пересечения с α и т.д. Если для некотрой точки A точка A_n совпадает с A, то это будет выполнено и для любой другой точки окружности α.

Теорема Понселе, безусловно, является одной из самых сложных и красивых теорем элементарной геометрии. Ее доказательство можно найти, например в «Задачнике по планиметрии» И.Ф.Шарыгина (задача 615). Оказывается, однако, что если число n четно, то теорему можно усилить:

Пусть O — центр α, I — центр β, A — произвольная точка α, B — точка, полученная из A через $n/2$ описанных в формулировке теоремы Понселе шагов. Тогда точка M пересечения прямых AB и OI не зависит от выбора точки A.

Прежде чем доказывать усиленную теорему, сформулируем две леммы, верные для любых двух окружностей, одна из которых лежит внутри другой.

Лемма 1. *Пусть AB и CD — касательные к β, перпендикулярные прямой OI (A, B, C, D лежат на α), M — точка пересечения диагоналей трапеции ABCD (очевидно, M лежит на OI), P — произвольная точка α, PQ — касательная к β. Тогда отношение PQ/PM не зависит от P (рис.1).*

Доказательство. Введем систему координат с началом в точке O и осью абсцисс, совпадающей с OI. Пусть $OI = d$. Нетрудно убедиться, что координата l точки M удовлетворяет равенству

$$\left(R^2+d^2-r^2\right)/\left(R^2+l^2\right)=d/l,$$

где R и r — радиусы α и β соответственно. Пусть теперь P — точка с

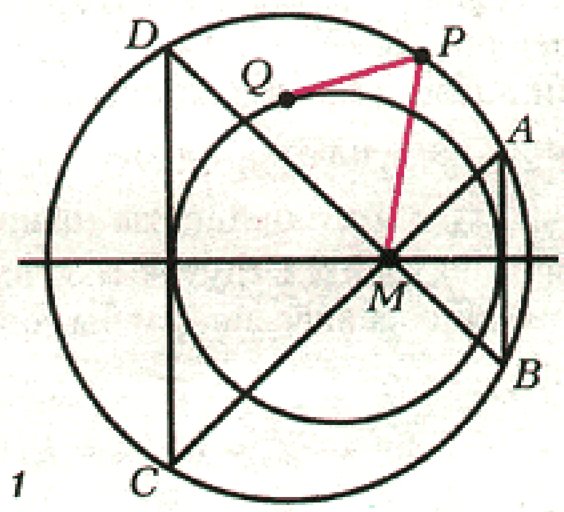

Рис. 1

координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Тогда $PM^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\varphi$, $PQ^2 = PI^2 - r^2 = R^2 + d^2 - r^2 - 2Rd\cos\varphi$, и отношение PQ/PM не зависит от φ.

Лемма 2. *Пусть A, B — точки α, AB касается β, A′, B′ — вторые точки пересечения прямых AM и BM с α. Тогда A′B′ касается β (рис.2).*

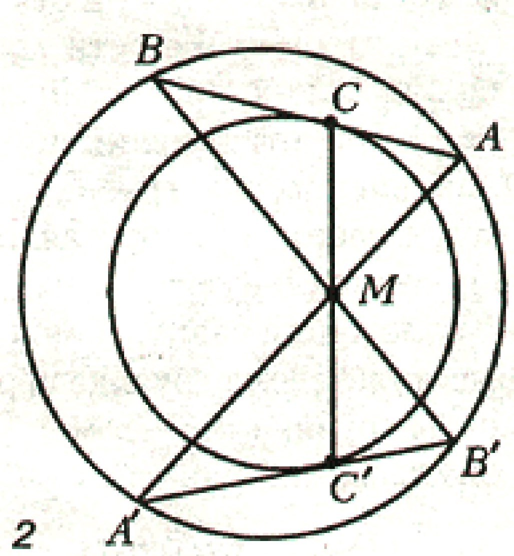

Рис. 2

Доказательство. Пусть C — точка касания AB и β. Из леммы 1 следует, что MC — биссектриса угла AMB. Продолжим MC за точку M до пересечения с $A'B'$ в точке C'. Так как треугольники AMB и $B'MA'$ подобны, $A'C'/AM = B'C'/BM = AC/AM$. По лемме 1 это означает, что отрезки $A'C'$ и $B'C'$ равны касательным, проведенным из A' и B' к β, а это возможно только если прямая $A'B'$ касается β в точке C'.

Теперь усиленная теорема Понселе доказывается совсем просто. Действительно, пусть A_0A_1 — сторона вписанно-описанного $2k$-угольника, B_0, B_1 — вторые точки пересечения прямых A_0M, A_1M с α. Покажем, что B_0 совпадает с A_k. Предположим, например, что A_k находится ближе к A_1, чем B_0. Тогда по лемме 2 B_k находится ближе к B_1, чем A_0, и следовательно, A_{k+1} ближе к A_0, чем B_1. Таким образом, A_kA_{k+1} не может касаться β. Аналогично разбирается случай, когда A_k находится дальше от A_1, чем B_0.

Из усиленной теоремы Понселе легко выводятся следующие свойства вписанно-описанных многоугольников с четным числом сторон:

1) *Главные диагонали многоугольника пересекаются в одной точке M.*

2) *Точка M лежит на прямой, соединяющей центры окружностей.*

3) *Прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон многоугольника с вписанной окружностью, тоже проходят через M и являются биссектрисами углов между диагоналями.*

Для читателей, знакомых с понятием *инверсии*, отметим также, что инверсия с центром в M переводит вписанную и описанную окружности в концентрические.

На рисунках 3, 4 приведены примеры вписанно-описанных шести- и восьмиугольника.

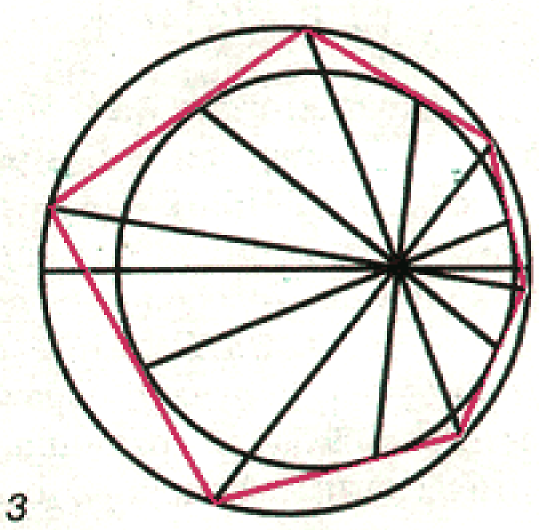

Рис. 3

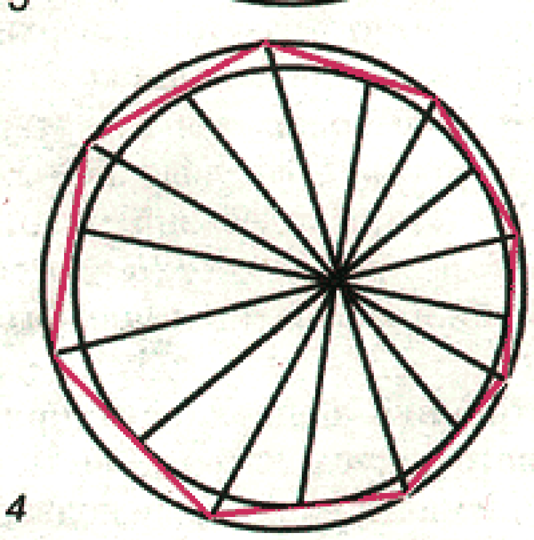

Рис. 4

Теперь нам придется сделать небольшое отступление. Прежде всего напомним одну простую задачу:

Степенью точки относительно окружности называется величина $d^2 - r^2$, где r и d, соответственно, радиус окружности и расстояние от точки до ее центра. Требуется найти множество точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны.

Выбрав систему координат так, чтобы центры окружностей лежали на оси абсцисс, нетрудно убедиться, что искомым множеством будет прямая, перпендикулярная линии центров. Эта прямая называется радикальной осью окружностей.

Пусть теперь даны три окружности. Если их центры не лежат на одной прямой, то три радикальные оси пересекаются в одной точке. Если же центры лежат на одной прямой, то радикальные оси параллельны либо совпадают. В последнем случае окружности называются *соосными*. Любые две неконцентрические окружности определяют множество соосных с ними окружностей, которое называется *пучком*. Если две окружности пересекаются, определяемый ими пучок состоит из всех окружностей, проходящих через точки их пересечения, если касаются — из окружностей, касающихся их в той же точке. Нас будет интересовать третий случай, когда окружности не пересекаются. В этом случае пучок состоит из двух симметричных друг другу относительно радикальной оси совокупностей вложенных окружностей, стягивающихся к двум предельным точкам. В дальнейшем, говоря о пучке, мы будем подразумевать лишь одну из этих совокупностей. Отметим, что точка M, определенная в лемме 1, является предельной для пучка окружностей, соосных с α и β. Отсюда сразу получается следующее обобщение леммы 1:

Пусть α, β, γ — три соосных окружности (β, γ лежат внутри α), A — произвольная точка α, AB, AC — касательные к β, γ. Тогда отношение AB/AC не зависит от A.

Теперь нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть A_1, A_2, A_3 — точки окружности α, A_1A_2 касается β, A_1A_3 касается γ (α, β, γ определены выше). Тогда при любой точке A_1 прямая A_2A_3 касается одной и той же окружности, соосной с данными.*

Лемма 3 фактически является обобщением теоремы Понселе. Действительно, ее утверждение можно сформулировать так:

Даны $n+1$ соосных окружностей, α и лежащие внутри нее β_1, ..., β_n. Из точки A окружности α проведена касательная к β_1, вторично пересекающая α в точке A_1, из A_1 проведена касательная к β_2, пересекающая α в точке A_2 и т.д. Если A_n совпадает с A, то это будет выполняться для любой точки окружности α.

Очевидно, что теорема Понселе является частным случаем этого утверждения, получающимся при совпадении окружностей β_1, ..., β_n. При этом приведенное выше обобщение леммы 1 позволяет без каких-либо изменений распространить доказательство теоремы Понселе на общий случай. Следует также отметить, что если в лемме 3 B_1, B_2, B_3 — точки касания прямых A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 с соответствующими окружностями, то прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке.

Вернемся к вписанно-описанным многоугольникам. Введем такое определение:

Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — произвольный многоугольник. Диагонали A_1A_3, A_2A_4, ..., $A_{n-1}A_1$ назовем *диагоналями первого типа*, диагонали A_1A_4, A_2A_5, ..., $A_{n-2}A_1$ — *диагоналями второго типа* и т.д.

Оказывается, верна следующая теорема:

Во вписанно-описанном многоугольнике все диагонали одного типа касаются окружности, соосной с описанной и вписанной окружностями многоугольника (рис.5).

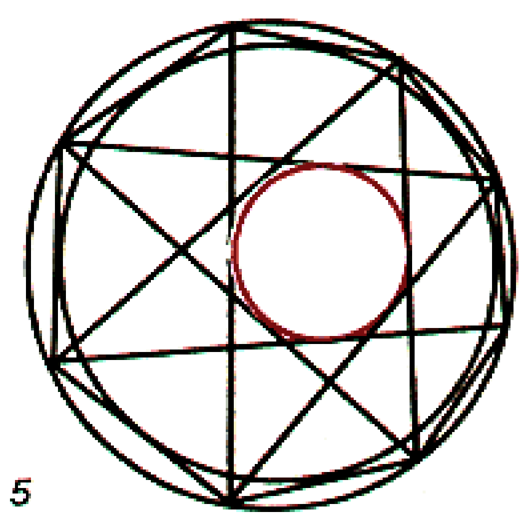

Рис. 5

Доказательство. Для диагоналей первого типа утверждение теоремы сразу получается из леммы 3, если положить $\gamma = \beta$. Индуктивный переход от k-го к $(k+1)$-му типу также осуществляется с помощью леммы 3.

И в заключение — серия задач. Из теоремы Понселе следует, что радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами связаны между собой, причем соответствующее соотношение зависит от числа сторон n. Нетрудно вывести такие соотношения для $n = 3$ и $n = 4$. Несколько сложнее получить соотношения для $n = 6$ и $n = 8$. Для других значений n соотношения мне неизвестны. Подумайте, как вывести их. Нельзя ли получить единое соотношение, связывающее R, r, d и n (скорее всего, нет, но вдруг...)?

Дополнение. Доказательство теоремы Понселе

Для читателей, не имеющих возможности посмотреть книгу И.Ф.Шарыгина, приведем содержащееся в ней доказательство теоремы Понселе. Прежде всего докажем следующее утверждение (задача 614).

Внутри окружности α находится окружность β. На α заданы две последовательности точек A_1, A_2, ... A_n и B_1, B_2, ..., B_n, идущие в одном направлении и такие, что прямые A_1A_2, A_2A_3, ..., B_1B_2, B_2B_3, ... касаются β. Докажите, что прямые A_1B_1, A_2B_2, ... касаются одной окружности, центр которой лежит на линии центров окружностей α и β. (Утверждение задачи можно усилить: эти прямые касаются окружности, соосной с данными.)

Доказательство. Пусть для определенности B_1 лежит на дуге A_1A_2, ограничивающей сегмент, не содержащий β. Обозначим точки касания β с прямыми A_1A_2, A_2A_3, ..., ..., B_1B_2, B_2B_3, ... через C_1, C_2, ..., D_1, D_2, ... соответственно (рис.6), K, L, P — соответственно точки пересечения D_1C_1 и A_1B_1, D_1C_1 и A_2B_2, A_1B_1 и A_2B_2.

В треугольниках A_1KC_1 и D_1LB_2 равны следующие углы: $\angle KC_1A_1 = \angle LD_1B_2$, $\angle C_1A_1K = \angle D_1B_2L$, следовательно, $\angle C_1KA_1 = \angle D_1LB_2$, т.е. треугольник KLP — равнобедренный, $KP = PL$, и существует окружность γ, касающаяся KP и PL в точках K и L.

Аналогично существует окружность, касающаяся A_2B_2 и A_3B_3 в точках L', M

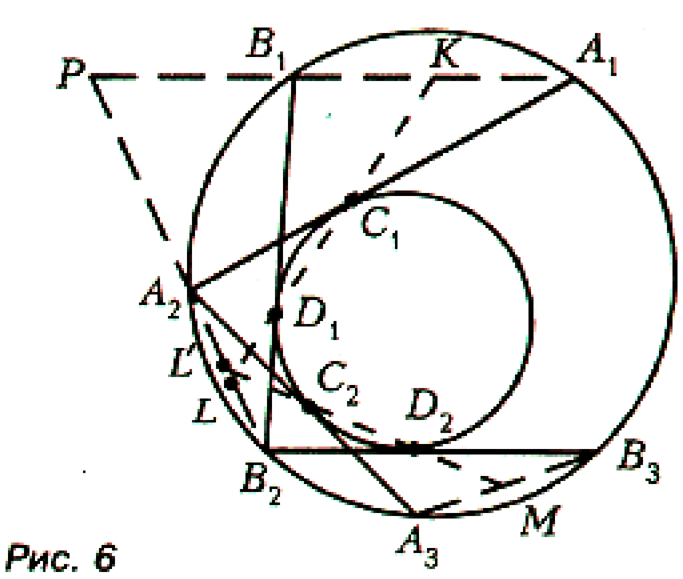

Рис. 6

пересечения этих прямых с C_2D_2. Для совпадения этой окружности с γ достаточно совпадения точек L и L'. Но

$$A_2L/LB_2 = S_{A_2C_1D_1}/S_{B_2C_1D_1} = (A_2C_1\cdot C_1D_1\cdot\sin\angle A_2C_1D_1)/(B_2D_1\cdot C_1D_1\cdot\sin\angle B_2D_1C_1) = A_2C_1/B_2D_1 = A_2C_2/B_2D_2 = A_2L'/B_2L'.$$

При этом отношение касательных, проведенных из любой точки α к β и γ, будет одним и тем же, и значит, γ соосна с α и β.

В обозначениях предыдущего утверждения теорема Понселе означает следующее: если A_{n+1} совпадает с A_1, то B_{n+1} совпадает с B_1. Предположим, что это не так. Тогда A_1B_1 и A_1B_{n+1} касаются γ, A_1A_2 пересекает γ, точки B_1, B_{n+1} лежат на дуге A_1A_2. Получается, что из A_1 к γ проведены две касательные, причем их точки касания лежат по одну сторону от секущей A_1A_2. Этого быть не может.