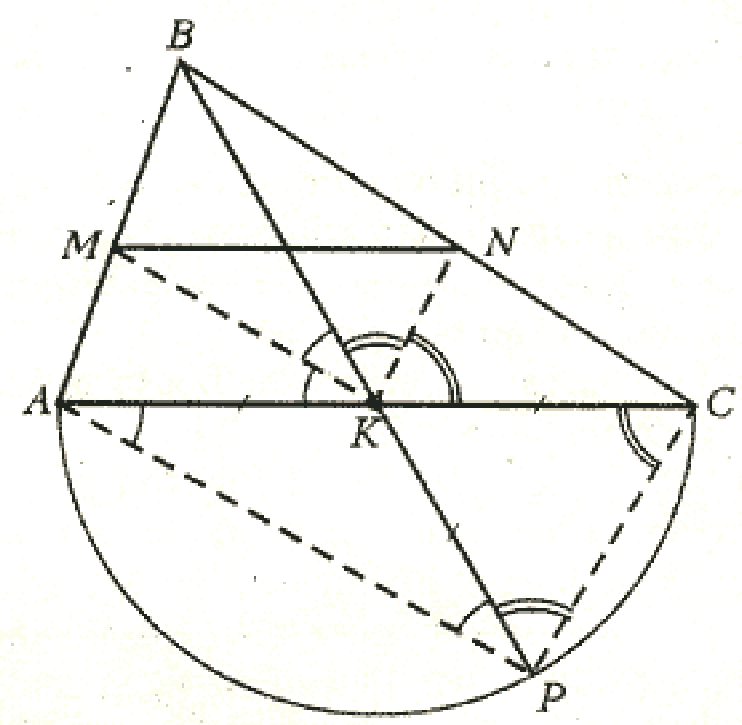
Решения задач М1606 — М1615, Ф1623 — Ф1627

М1606. *Дан треугольник ABC. Постройте отрезок MN с концами на сторонах AB и BC, параллельный стороне AC и видимый из середины стороны AC под прямым углом.*

Задача легко решается методом подобия. Пусть P — точка, в которой продолжение медианы BK пересекает полуокружность с центром K и диаметром AC (см. рисунок). При гомотетии с центром B, переводящей точку P в точку K, отрезок AC перейдет в искомый отрезок MN: этот отрезок параллелен AC и $\angle MKN = \angle APC = 90^\circ$.



Заметим, что треугольник AKP (а также CKP) — равнобедренный, поэтому углы $\angle MKA = \angle KAP$ и $\angle MKB = \angle APK$ равны (и, аналогично, $\angle BKN = \angle NKC$). Таким образом, для построения нужного отрезка MN достаточно провести биссектрисы KM и KN углов AKB и BKC. То, что полученный отрезок MN обладает нужными свойствами, легко доказать непосредственно: $\angle MKN = 90^\circ$, поскольку он состоит из половинок углов, дающих в сумме развернутый угол, а параллельность MN и AC вытекает из равенств, использующих свойства биссектрис:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AK}{KB} = \frac{CK}{KB} = \frac{CN}{NB}.$$

Задача имеет и другие решения, связанные с подсчетом углов.

Р.Травкин, Н.Васильев, В.Сендеров

М1607. *Корень трехчлена $ax^2 + bx + b$ умножили на корень трехчлена $ax^2 + ax + b$ и получили в произведении 1. Найдите эти корни.*

По условию a и b отличны от нуля. Если x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+ax+b=0$, то $1/x_1$ и $1/x_2$ — корни уравнения $bx^2+ax+a=0$. Таким образом, уравнения

$$ax^2+bx+b=0 \text{ и } bx^2+ax+a=0$$

имеют общий корень. Тот же корень имеет и их сумма: $(a+b)(x^2+x+1)=0$. Поскольку $x^2+x+1\neq 0$ (речь идет о вещественных корнях), то $b=-a$ и трехчлены в условии задачи имеют вид ax^2-ax-a и ax^2+ax-a, а искомые корни равны $(\sqrt{5}+1)/2$ и $(\sqrt{5}-1)/2$ либо $(-\sqrt{5}+1)/2$ и $(-\sqrt{5}-1)/2$.

Вместо суммы двух равенств можно рассмотреть произведение равенств

$$ax^2=-(bx+b) \text{ и } bx^2=-(ax+a),$$

которое после сокращения на $ab\neq 0$ приводится к виду $x^4=(x+1)^2$, откуда $x^2-x-1=0$.

С.Берлов, В.Сендеров

М1608. *На фестиваль военно-морской песни приглашены хоры из 100 стран. Каждый хор должен исполнить три песни и сразу уехать домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из участвующих стран. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трех оскорбительных для его страны песен.*

Нетрудно доказать по индукции, что если n хоров исполняют по три песни, каждая из которых может быть оскорбительной для одного из остальных хоров, то выступления хоров можно организовать в таком порядке, что каждый хор до своего выступления услышит не более трех оскорбительных песен.

Для $n=1$ и $n=2$ это очевидно. Если хоров n, то всего оскорбительных песен не более $3n$, и значит, найдется хор, на долю которого приходится не более трех оскорблений. Пусть этот хор выступает последним. Для остальных $n-1$ хоров выполнено то же условие и, по предположению индукции, их выступления можно организовать требуемым образом.

Конечно, число 3 в условии можно заменить на любое натуральное s.

Ф.Назаров

М1609. *Пусть $P(x)$ — а) квадратный трехчлен с неотрицательными коэффициентами, б) произвольный многочлен с неотрицательными коэффициентами. Докажите, что для любых действительных чисел x и y справедливо неравенство*

$$\left(P(xy)^2\right)\leq P\left(x^2\right)\cdot P\left(y^2\right).$$

Пусть коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ многочлена $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_nt^n$ неотрицательны. Положим $b_k=\sqrt{a_k}x^k$; $c_k=\sqrt{a_k}y^k$; $k=0, 1, \ldots, n$. Неравенство, которое требуется доказать, имеет вид

$$\left(b_0c_0+b_1c_1+\ldots+b_nc_n\right)^2\leq\left(b_0^2+b_1^2+\ldots+b_n^2\right)\left(c_0^2+c_1^2+\ldots+c_n^2\right). \quad (*)$$

Последнее неравенство (оно называется неравенством *Коши — Буняковского*) справедливо для любых значений переменных (и обращается в равенство только если «векторы» $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$ пропорциональны — один из них получается умножением всех координат другого на одно и то же число). Одно из самых простых доказательств неравенства $(*)$: рассмотреть квадратный трехчлен

$$Q(t)=(b_0t+c_0)^2+(b_1t+c_1)^2+\ldots+(b_nt+c_n)^2,$$

очевидно неотрицательный при всех t, и записать условие, что дискриминант этого трехчлена $Q(t)=At^2+Bt+C$ неположителен, т.е. $B^2\leq 4AC$.

Е.Малинникова, Н.Васильев

М1610. *Переаттестация Совета Мудрецов происходит так: король выстраивает их в колонну по одному и надевает на голову каждому колпак а) белого или черного; б) белого, синего или красного цвета. Каждый мудрец видит цвета колпаков всех впереди стоящих мудрецов, но не видит цвет своего колпака и цвета колпаков мудрецов, стоящих позади него. Затем мудрецы по одному называют какой-нибудь цвет (каждому разрешается говорить только один раз). После этого король казнит всех мудрецов, не угадавших цвет своего колпака. Накануне переаттестации все члены Совета договорились между собой и придумали, как минимизировать число казненных. Скольким из них гарантированно удастся избежать казни?*

Ответ на оба вопроса а) и б) одинаков: для любого количества n мудрецов все, кроме одного — последнего, могут избежать казни. (Разумеется, последний не может иметь гарантии спасения, поскольку его колпак не видит никто.) В случае а) достаточно соображения четности — сложения по модулю 2, в случае б) помогает сложение по модулю 3.

Покажем, как могут действовать мудрецы, сначала — на более простом примере.

а) Пусть белый и черный цвета обозначаются числами 0 и 1, а x_k — число, означающее цвет колпака k-го мудреца. Каждый из мудрецов может посчитать четность количества черных колпаков у стоящих перед ним, другими словами — остаток при делении на 2 суммы соответствующих чисел; обозначим это число для k-го мудреца через s_{k-1} ($k=2, 3, \ldots, n$): $s_{k-1}=x_1+x_2+\ldots+x_{k-1}$ по модулю 2. Пусть сначала n-й мудрец называет s_{n-1}. Затем, зная s_{n-1} и s_{n-2}, стоящий перед ним $(n-1)$-й называет свое число x_{n-1} (оно равно разности $s_{n-1}-s_{n-2}$ по модулю 2). Затем, зная s_{n-1}, x_{n-1} и s_{n-3}, $(n-2)$-й называет свое число x_{n-2} (оно равно $s_{n-1}-x_{n-1}-s_{n-3}$ по модулю 2), затем $(n-3)$-й называет свое число $x_{n-3}\equiv s_{n-1}-x_{n-1}-x_{n-2}-s_{n-4} \pmod 2$ и так далее вплоть до $x_1\equiv s_{n-1}-x_{n-1}-\ldots-x_2$.

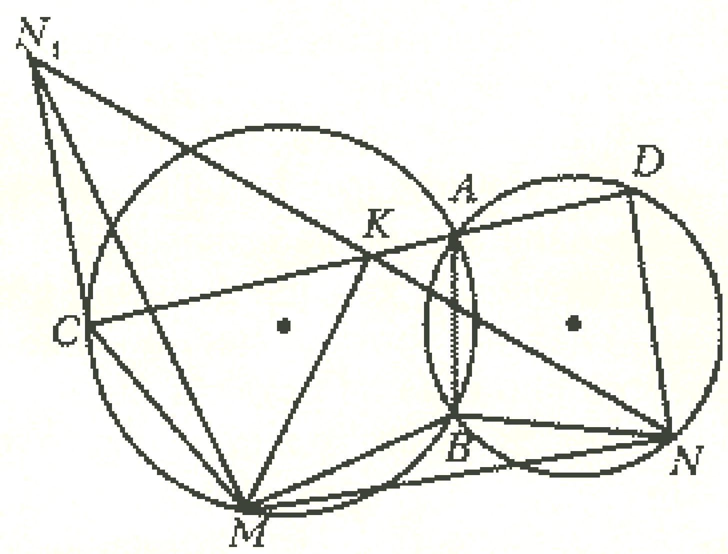
б) Рассуждения совершенно аналогичны: достаточно трем цветам сопоставить числа 0, 1, 2 и считать суммы и разности по модулю 3, т.е. остатки соответствующих чисел при делении на 3.

Н.Васильев

М1611. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Пусть M и N — середины дуг BC и BD, не содержащих точку A, а K — середина отрезка CD. Докажите, что угол MKN прямой. (Можно счи-*

тать, что точки C и D лежат по разные стороны от точки A.)

Пусть N_1 — точка, симметричная точке N относительно K (см. рисунок). Тогда $\Delta KCN_1 = \Delta KDN$, поэтому



$CN_1 = ND$ и $\angle N_1CK = \angle NDK = \pi - \angle ABN$. Заметим еще, что $\angle MCK = \pi - \angle ABM$. Складывая полученные равенства, находим, что $\angle N_1CM = \angle MBN$. Кроме того, из условия следует, что $CM = MB$ и $BN = ND$ (т.е. $BN = CN_1$). Значит, $\Delta MCN_1 = \Delta MBN$, откуда $MN_1 = MN$. Отрезок MK — медиана в равнобедренном треугольнике MNN_1, поэтому $\angle MKN = 90°$.

Замечание. Задача имеет много других решений. Например, можно воспользоваться подобием треугольников MEK и KFN, где E и F — середины отрезков BC и BD соответственно. Эти треугольники имеют две пары взаимно перпендикулярных сторон: EK и FN, ME и KF; следовательно, перпендикулярны и их третьи стороны.

Кроме того, соображения, использующие композицию поворотов, позволяют отказаться от дополнительного условия в задаче (о том, что точки C и D лежат по разные стороны от A), которое было задано лишь затем, чтобы избежать разбора различных случаев. Действительно, рассмотрим композицию поворотов $R_M^\beta \circ R_N^\alpha$ — на углы $\alpha = \angle DNB$ и $\beta = \angle BMC$ вокруг точек N и M соответственно (углы предполагается ориентированными). Заметим, что $\alpha + \beta = 180°$, поэтому $R_M^\beta \circ R_N^\alpha = Z_x$ — центральная симметрия относительно некоторой точки X. Но

$$Z_X(D) = \left(R_M^\beta \circ R_N^\alpha\right) = R_M^\beta(B) = C,$$

поэтому X — середина отрезка CD, т.е. точка K. Если $N_1 = Z_K(N)$, то $N_1 = \left(R_M^\beta \circ R_N^\alpha\right)(N) = R_M^\beta(N)$, т.е. ΔNMN_1 равнобедренный и $\angle MKN = 90°$.

Д.Терешин

М1612*. *В клетках таблицы 10×10 расставлены числа 1, 2, 3, ..., 100 так, что сумма любых двух соседних чисел не превосходит S. Найдите наименьшее возможное значение S. (Числа называются соседними, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону.)*

Ответ. 106. Пример расстановки, для которой $S = 106$, приведен на рисунке (этот пример, где наибольшие числа в «черных» клетках соседствуют с наименьшими в «белых»). Докажем теперь, что $S \geq 106$ для любой расстановки чисел в таблице. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Если в прямоугольнике 2×10 отмечено $1 \leq n \leq 9$ попарно несоседних клеток, то число неотмеченных клеток прямоугольника, соседних с отмеченными, больше n.*

Доказательство. В каждом из 10 прямоугольничков 1×2, длинные стороны которых параллельны коротким сторонам прямоугольника 2×10, отмечено не более одной клетки. Если одна клетка в таком прямоугольничке отмечена, то другая — неотмеченная, соседняя с отмеченной. Тем самым мы уже имеем n таких клеток, а поскольку $n \leq 9$, то (при $n \geq 1$) найдется, очевидно, и клетка, принадлежащая прямоугольничку 1×2 без отмеченных клеток, граничащая с отмеченной клеткой соседнего прямоугольничка 1×2. Следовательно, общее число неотмеченных клеток, соседних с отмеченными, больше n, что и требовалось доказать.

46	55	47	54	48	53	49	52	50	51
60	41	59	42	58	43	57	44	56	45
36	65	37	64	38	63	39	62	40	61
70	31	69	32	68	33	67	34	66	35
26	75	27	74	28	73	29	72	30	71
80	21	79	22	78	23	77	24	76	25
16	85	17	84	18	83	19	82	20	81
90	11	89	12	88	13	87	14	86	15
6	95	7	94	8	93	9	92	10	91
100	1	99	2	98	3	97	4	96	5

Допустим, что $S \leq 105$ для некоторой расстановки чисел. Стерев все числа в таблице, будем вписывать их на прежние места, начиная с числа 100, в порядке убывания.

Выделим в таблице пять неперекрывающихся горизонтальных полос размерами 10×2 клеток и пять неперекрывающихся вертикальных полос 2×10 клеток. Зафиксируем число n_0, после вписывания которого впервые либо в каждой горизонтальной, либо в каждой вертикальной полосе окажется не меньше одного вписанного числа; соответствующий момент назовем критическим. Пусть уже вписаны 33 числа от 100 до 68, но есть пустые горизонтальная и вертикальная полосы. Те 64 клетки таблицы, которые не входят в эти полосы, можно разбить на 32 прямоугольничка 1×2, хотя бы в одном из них окажутся два вписанных числа с суммой не меньше чем $68 + 69 > 105$. Отсюда следует, что $n_0 \geq 68$.

Заметим, что в критический момент в каждую из полос вписано меньше 10 чисел (если бы нашлась, например, горизонтальная полоса, в которую вписано не меньше 10 чисел, то перед вписыванием числа n_0 в ней было бы не меньше 9 чисел, в силу чего в каждой из вертикальных полос было бы минимум по одному числу, что противоречит определению числа n_0). Поэтому к полосам того направления, в которых в критический момент оказалось хотя бы по одному числу, можно применить лемму.

Поскольку в критический момент в таблицу вписано $101 - n_0$ чисел, из леммы следует, что у клеток, куда они вписаны, есть не менее $(101 - n_0) + 5 = 106 - n_0$ пустых соседних. Нам предстоит, таким образом, вписать в таблицу число, которое не меньше чем $106 - n_0$, причем рядом с числом, которое не меньше чем n_0. Сумма этих двух чисел будет не меньше чем $106 - n_0 + n_0 = 106$, что противоречит нашему предположению о том, что $S \le 105$.

Д.Храмцов, Д.Фон-дер-Флаас

М1613*. *На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камней (возможно, по нескольку в одной клетке). Разрешается выполнять следующие действия:*

1° снять по одному камню с клеток $n-1$ и n и положить один камень в клетку $n+1$;

2° снять два камня с клетки n и положить по одному камню в клетки $n+1$, $n-2$.

Докажите, что при любой последовательности действий мы достигнем ситуации, когда указанные действия больше выполнять нельзя, и эта конечная ситуация не зависит от последовательности действий (а зависит только от начальной раскладки камней по клеткам).

Обозначим через a_i количество камней в клетке с номером i. Тогда последовательность $A = (a_i)$ задает конфигурацию — расположение камней по клеткам. Назовем весом конфигурации A число $w(A) = \sum a_i\lambda^i$, где число $\lambda > 0$ выбрано так, что разрешенные действия не меняют веса конфигурации. Для этого достаточно взять λ равным большему корню уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, т.е. $\lambda = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$. Действительно, $\lambda^{n+1} - \lambda^n - \lambda^{n-1} = \lambda^{n-1}(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$, $\lambda^{n+1} - 2\lambda^n + \lambda^{n-2} = \lambda^{n-2}(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$.

Докажем индукцией по k — числу камней, что любая последовательность действий завершается. При $k = 1$ это верно. Пусть k — наименьшее, при котором для какой-то конфигурации $A = (a_i)$ с $\sum a_i = k$ есть бесконечная последовательность действий. Наибольший номер непустой клетки при разрешенных действиях не уменьшается, но и расти бесконечно он не может — он не может превысить числа n, при котором $\lambda^n > w(A)$. Значит, с какого-то момента наибольший номер непустой клетки перестает изменяться, и с камнями, попавшими в эту клетку, уже ничего не происходит. Выбросим эти камни и применим предположение индукции к оставшимся.

В конечной конфигурации в каждой клетке не более одного камня, и нет двух непустых клеток подряд. Докажем, что любые две конфигурации $A = (a_i)$ и $B = (b_i)$ с такими свойствами имеют разные веса. Пусть n — наибольший номер, при котором $a_i \ne b_i$; пусть $a_n = 1$, $b_n = 0$. Выбросим из A и B все камни с номерами, большими n (они в A и B совпадают). Для оставшихся конфигураций A' и B' имеем

$$w(A') \ge \lambda^n;$$

$$w(B') < \lambda^{n-1} + \lambda^{n-3} + \lambda^{n-5} + \ldots = \lambda^{n-1}\frac{1}{1-\lambda^{-2}} = \lambda^n.$$

Д.Фон-дер-Флаас

М1614. *На плоскости расположены $2n+1$ прямых. Докажите, что существует не более $n(n+1)(2n+1)/6$ различных остроугольных треугольников, стороны которых лежат на этих прямых.*

Можно считать, что среди прямых нет ни параллельных, ни перпендикулярных и никакие три прямые не пересекаются в одной точке (другими словами, любые три прямые образуют треугольник, причем либо остроугольный, либо тупоугольный). Действительно, выполнения этого условия можно добиться, поворачивая прямые на сколь угодно маленькие углы, а при достаточно малых углах поворота существующие остроугольные треугольники не перестанут быть остроугольными, так что число остроугольных треугольников не уменьшится.

Пусть A и B — количества соответственно остроугольных и тупоугольных треугольников на картинке. Будем называть треугольник, образованный прямыми a, b, c, *частично остроугольным относительно* a, если его углы при стороне, лежащей на a, оба острые. Выберем произвольную прямую l из нашего набора и повернем картинку так, чтобы l стала горизонтальной осью. Остальные $2n$ прямых разбиваются на два класса: прямые с положительным коэффициентом наклона и прямые с отрицательным коэффициентом наклона. Нетрудно видеть, что две прямые образуют вместе с l частично остроугольный относительно l треугольник тогда и только тогда, когда они принадлежат разным классам. Поэтому количество таких треугольников равно произведению количеств прямых в двух классах, что по неравенству о средних не превосходит n^2. Сложив такие оценки для всех прямых, получаем, что количество пар «прямая и частично остроугольный относительно нее треугольник» не превосходит $n^2(2n+1)$. В этом количестве каждый остроугольный треугольник учитывается три раза, а тупоугольный — один раз, значит,

$$3A + B \le n^2(2n+1).$$

Общее число треугольников равно количеству троек прямых, т.е.

$$A + B = \frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}.$$

Вычтем это тождество из предыдущего неравенства:

$$2A \le \frac{3n^2(2n+1)}{3} - \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(n+1)}{3}.$$

Таким образом, $A \le n(n+1)(2n+1)/6$, что и требовалось.

Замечание 1. Оценка $n(n+1)(2n+1)/6$ — точная: существуют расположения прямых, в которых ровно такое количество остроугольных треугольников. Примером служит набор из $2n+1$ прямых, содержащих стороны правильного $(2n+1)$-угольника. Предлагаем читателям ответить на вопрос: какова точная оценка для $2n$ прямых?

Замечание 2. Задача имеет следующую эквивалентную переформулирову: для набора из $2n+1$ точек на окружности не более $n(n+1)(2n+1)/6$ треугольников с вершинами в этих точках содержат центр окружности в качестве внутренней точки. Для доказательства эквивалентности установим соответствие между расположениями прямых и наборами точек на окружности, при котором остроугольным треугольникам соответствуют треугольники (с вершинами на окружности), содержащие внутри себя центр окружности. Для этого достаточно прямым, составляющим угол φ с фиксированной прямой (скажем, осью Ox), сопоставить точку на фиксированной окружности δ с координатой 2φ, где $0 \le \varphi < \pi$. Нетрудно проверить, что при таком соответствии тройка прямых разных направлений (не проходящих через одну точку) ограничивает прямоугольный треугольник, если две из соответствующих им точек на окружности δ диаметрально противоположны, тупоугольный (остроугольный) треугольник — если точки лежат (соответственно, *не* лежат) по одну сторону от некоторого диаметра δ.

С.Иванов

M1615. *В прямоугольную коробку $m \times n$, где m и n — нечетны, уложены кости домино размерами 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол.*

Назовем *полями* клетки доски, стоящие на пересечении горизонталей и вертикалей с нечетными номерами (см. рисунок 1, где поля закрашены голубым цветом). Заметим, что дырка будет перемещаться только по этим полям. Докажем, что на доске $m \times n$ дырка, первоначально расположенная в углу, может быть перемещена в любое другое поле, как бы ни были расположены доминошки.

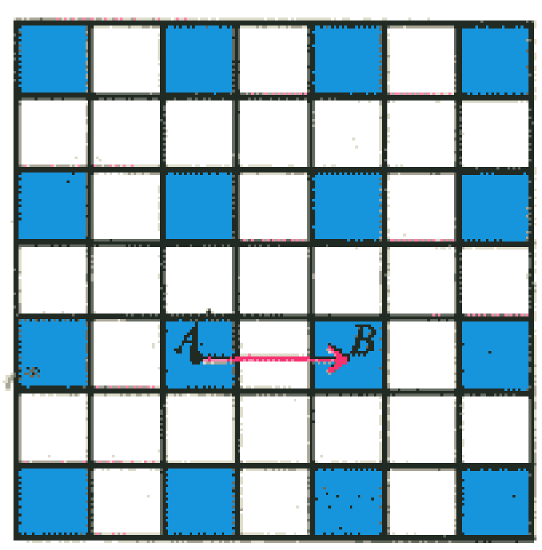


Рис.1

Из центра каждого поля A, закрытого доминошкой, проведем стрелку в соседнее поле, граничащее с короткой стороной этой доминошки; если дырка находилась бы в B, то после передвижения этой доминошки она попала бы в A. Таким образом, из каждого поля выходит ровно одна стрелка (именно здесь используется нечетность m и n).

Докажем, что из каждого поля путь по стрелкам неизбежно приведет к полю, где расположена дырка, для этого убедимся, что такой путь не может зациклиться. Другими словами, не существует замкнутого пути из стрелок, ограничивающего многоугольник.

Для этого докажем, что (строго) внутри замкнутого контура из стрелок, соединяющих центры клеток — этот контур, очевидно, расположен на решетке квадратов со сторонами 2 — лежит *нечетное* число k клеток (исходной решетки со стороной 1). Тем самым, внутренность этого контура не может быть заполнена доминошками! (Здесь используется тот факт, что дырка лежит на границе прямоугольника.)

Приведем два доказательства этой леммы о нечетности. Первое использует подсчет площадей и углов. Вся площадь, ограниченная контуром из стрелок, очевидно, кратна 4, поскольку она состоит из нескольких квадратов 2×2. Отметим с внутренней стороны каждой стрелки контура полоску шириной $1/2$ — примыкающий к ней прямоугольник $2 \times 1/2$ (рис.2). Сумма пло-

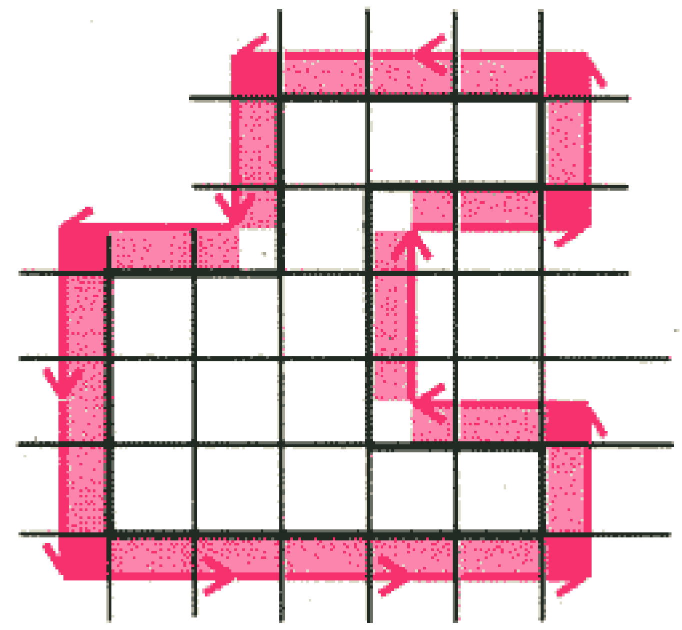


Рис.2

щадей s таких полосок равна числу звеньев замкнутой ломаной и потому четна (вверх направлено столько же звеньев, сколько вниз, вправо — столько же, сколько влево). Но при каждом повороте на угол 90° или −90° образуется пересечение полосок площадью $1/4$ или возникает зазор между полосками и внутренними клетками с такой же площадью $1/4$. В замкнутой ломаной поворотов одного знака на 4 больше, чем другого. Таким образом, площадь зазора (шириной $1/2$) между контуром из стрелок и внутренностью из k клеток отличается на 1 от s, т.е. нечетна. Итак, k получается вычитанием из числа, кратного 4, нечетного числа $s - 1$ и, значит, нечетно.

Второе доказательство нетрудно провести индукцией по числу квадратов 2×2, заключенных внутри контура. Нужно лишь доказать, что в любом многоугольнике M, состоящем из нескольких квадратов клетчатой бумаги, можно выбрать один «крайний» квадрат, после удаления которого остается (нераспадающийся) многоугольник. Это можно сделать (примерно так же, как выше «с помощью стрелок» мы искали путь для перемещения доминошек).

Выберем из нашего многоугольника M любой квадрат — присвоим ему номер 0, соседним с ним (по стороне) квадратам из M присвоим номер 1, их соседям (которые еще не имеют номера) присвоим номер 2, и т.д. (рис.3). Квадрат K с наибольшим номером и будет «крайним». Он граничит либо с одним квадратом из M, либо с двумя (причем в последнем случае весь угол из четырех квадратов, включающий K, принадлежит M); как легко видеть, внутренность M при удалении такого квадрата K

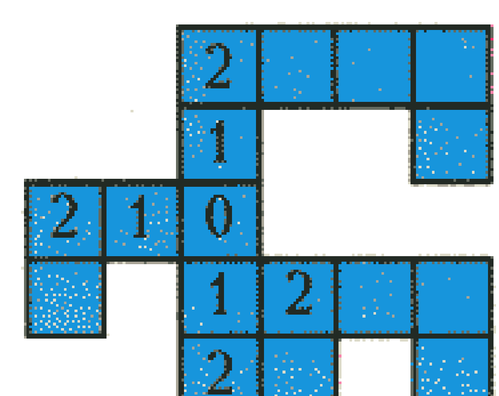


Рис.3

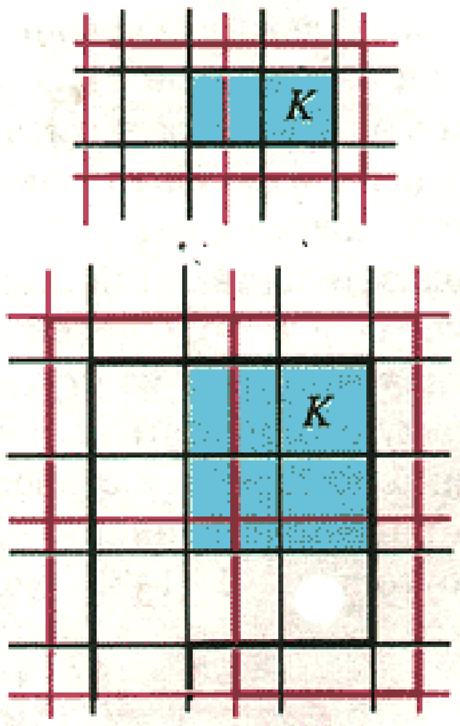


Рис.4

уменьшается на 2 или 4 клетки (рис.4). Поскольку для M, состоящего из одного квадрата, внутренность — одна клетка, по индукции мы докажем, что для любого M она состоит из нечетного числа клеток.

А.Шаповалов, Н.Васильев

Ф1623. *На гладком горизонтальном столе находится клин массой M с углом 45° при основании, на нем — клин такой же массы M с таким же углом, так что верхняя плоскость второго клина горизонтальна, а на ней лежит кубик массой m (рис.1). Всю конструкцию удерживают неподвижной. Какую скорость приобретет кубик через время τ после растормаживания системы? Трением пренебречь. Считать, что за указанный интервал времени характер движения не меняется.*

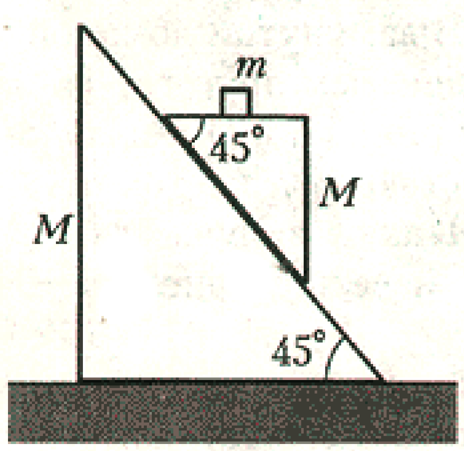


Рис.1

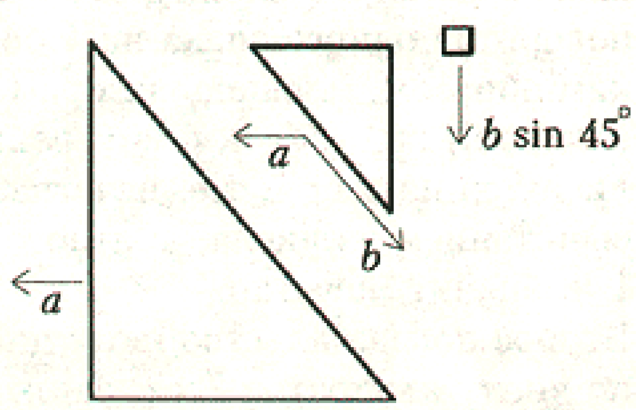


Рис.2

Обозначим буквой a ускорение нижнего клина — оно горизонтальное (рис.2). Ускорение верхнего клина относительно нижнего направлено вдоль плоскости их соприкосновения — вниз под углом 45° к горизонту. Удобно представить полное ускорение верхнего клина в виде суммы двух векторов — горизонтально направленного вектора, по величине равного a, и направленного вниз под углом 45° вектора, равного по величине b. Тогда горизонтальная составляющая ускорения верхнего клина направлена противоположно ускорению нижнего и равна $b\cos 45° - a$, вертикальная составляющая равна $b\sin 45°$. Ускорение кубика, очевидно, направлено вниз и равно вертикальной составляющей ускорения верхнего клина, т.е. $b\sin 45°$.

Найдем соотношение между величинами a и b. Для этого вспомним, что в отсутствие внешних горизонтальных сил ускорение центра масс по горизонтали должно быть нулевым. Кубик движется строго вертикально, поэтому

$$M(b\cos 45° - a) = Ma,\ \ b = 2a/\cos 45° = 2\sqrt{2}a.$$

Тогда горизонтальная составляющая полного ускорения верхнего клина относительно земли равна a, вертикальная составляющая ускорения этого клина (и кубика) равна $2a$. Модуль полного ускорения клина при этом равен $\sqrt{5}a$.

Для нахождения ускорений тел воспользуемся законом сохранения энергии. Для этого подождем время τ после начала движения тел и приравняем полную кинетическую энергию системы уменьшению ее потенциальной энергии. Скорости и смещения за время τ найдем по соответствующим формулам для равноускоренного движения. Уменьшение потенциальной энергии системы связано с вертикальным смещением верхнего клина и кубика:

$$\Delta E_p = (M+m)g\frac{2a\tau^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия тел равна

$$E_k = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{M\left(\sqrt{5}a\tau\right)^2}{2} + \frac{m(2a\tau)^2}{2}.$$

Приравнивая ΔE_p и E_k, получим величину ускорения a:

$$a = g\frac{M+m}{3M+2m},$$

а значит, и скорость кубика через время τ после начала движения:

$$v = 2a\tau = 2g\tau\frac{M+m}{3M+2m}.$$

З.Рафаилов

Ф1624. *Два маленьких шарика массой M каждый находятся на расстоянии L друг от друга и имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости v_0, перпендикулярные отрезку, соединяющему шарики. Никаких внешних сил нет. Учитывая гравитационное взаимодействие шариков, найдите максимальное расстояние между ними в процессе движения и минимальные скорости шариков.*

При достаточно большой начальной скорости шариков расстояние между ними будет увеличиваться, а их скорости будут уменьшаться — шарики притягиваются друг к другу. В этом случае максимальное расстояние между шариками соответствует минимальной скорости (в силу симметрии, скорости шариков в любой момент равны друг другу). Если шарики не разлетятся на бесконечное расстояние (а при достаточно большой скорости так и было бы), максимальное расстояние между ними будет в тот момент, когда проекции скоростей на прямую, соединяющую шарики, окажутся равными нулю. Обозначим скорости шариков в этот момент v, а расстояние между ними s. Тогда из закона сохранения энергии получим (шариков — два!)

$$Mv_0^2 - \frac{GM^2}{L} = Mv^2 - \frac{GM^2}{s}.$$

В соответствии с законом сохранения момента импульса (или второго закона Кеплера), можно записать

$$Mv_0L = Mvs.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$s = \frac{L}{GM/\left(Lv_0^2\right) - 1}, \quad v = v_0\left(\frac{GM}{Lv_0^2} - 1\right).$$

Проанализируем полученный ответ. Отрицательное значение знаменателя в первой формуле соответствует разлету шариков на бесконечное расстояние, это произойдет при выполнении условия $v_0^2 > GM/L$. Если знаменатель меньше единицы, то все в порядке, а если он больше единицы — то мы нашли минимальное расстояние между шариками (наши уравнения годятся и для минимума, и для максимума). В этом случае ответ простой: максимальное расстояние между шариками L, а минимальная скорость v_0. Это соответствует выполнению условия

$$\frac{GM}{Lv_0^2} - 1 > 1, \text{ или } v_0^2 < \frac{GM}{2L}.$$

И наконец, если скорости шариков не слишком малы и не очень велики, т.е. лежат в найденных границах, то максимальное расстояние — это s, а минимальная скорость — v.

Р.Шариков

Ф1625. *В кубическом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится гелий при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. В стенке сосуда открывают отверстие площадью $S = 1$ см^2 и через время $\tau = 0{,}01$ с закрывают. Снаружи — вакуум. Оцените изменение температуры газа в сосуде после установления в нем равновесия. Считайте, что открывание и закрывание отверстия производят очень аккуратно — не создавая лишних потоков газа.*

Газ в сосуде довольно плотный, молекулы вылетают из сосуда как бы «сплошной средой». Оценим число вылетевших молекул — его мы найдем так же, как обычно получают число ударов молекул о стенку сосуда (тут несущественны удары молекул друг о друга). За время τ вылетает половина молекул из объема $Sv\tau$. Скорость молекул v оценим из средней кинетической энергии (мы потом непременно проверим, не слишком ли сильно изменится температура и можно ли для ее оценки использовать начальное значение 300 К): $v = \sqrt{3RT/\mathrm{M}} \approx 1500$ м/с, где $\mathrm{M} = 4$ г/моль — молярная масса гелия. Тогда объем, в котором вначале содержались вылетевшие молекулы, составит

$$\Delta V = \frac{1}{2}Sv\tau \approx 7\cdot 10^{-4}\text{ м}^3 \ll V.$$

Видно, что в сосуде практически ничего не изменилось.

Оставшийся в сосуде газ совершит некоторую работу, «выдавливая» вылетающую порцию наружу. Тепла к сосуду не подводилось, значит, работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Запишем уравнение первого начала термодинамики:

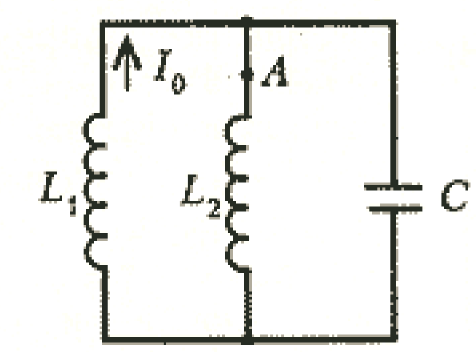
$$p\Delta V = -\Delta U = -1{,}5\nu R\Delta T.$$

Отсюда, учитывая уравнение состояния $pV = \nu RT$, найдем

$$\Delta T = -T\frac{2\Delta V}{3V} \approx -0{,}15 \text{ К}.$$

А.Повторов

Ф1627 [1]. *Конденсатор емкостью C подключают к параллельно соединенным катушкам, индуктивности которых L_1 и L_2 (см. рисунок [2]). В начальный момент конденсатор не заряжен, через первую катушку течет ток I_0, ток второй катушки равен нулю. Найдите максимальный заряд конденсатора и максимальную величину тока в точке A.*



Катушки подключены параллельно, значит, их ЭДС индукции в любой момент одинаковы, а изменения магнитных потоков через них равны между собой. (Тот же вывод можно сделать, рассматривая магнитный поток через сверхпроводящий контур, образованный катушками.) Обозначая токи катушек в некоторый момент времени I_1 и I_2, запишем

$$L_1I_0 = L_1I_1 + L_2I_2.$$

Максимальный заряд конденсатора соответствует моменту, когда ток, «втекающий» в обкладку конденсатора, обращается в ноль, т.е. $I_1 = I_2$. Тогда заряд можно найти, используя закон сохранения энергии. После несложных преобразований получим

$$Q_m = I_0\sqrt{\frac{CL_1L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Максимальный ток через вторую катушку получится в тот момент, когда ЭДС индукции обратится в ноль. Это означает, что и заряд конденсатора в этот момент обращается в ноль. Тогда закон сохранения энергии можно записать без учета энергии конденсатора:

$$L_1I_1^2 + L_2I_2^2 = L_1I_0^2.$$

Объединяя это уравнение с уравнением для токов (магнитных потоков), получим

$$L_1I_0^2 = L_1\left(I_0 - \frac{L_2I_2}{L_1}\right)^2 + L_2I_2^2.$$

У этого уравнения для I_2 имеются два корня. Один из них равен нулю — он соответствует минимальному значению этого тока (условия минимума очень похожи на условие максимума — ЭДС индукции и в этом случае равна нулю), а второй корень искомый:

$$I_2 = 2I_0\frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Р.Александров

---

[1] *Решение задачи Ф1626 будет опубликовано позже.*

[2] *К сожалению, на рисунке в условии задачи (см. «Квант» №6 за 1997 г.) допущена неточность.*