О кубических уравнениях

А. РУБИНШТЕЙН

20 ФЕВРАЛЯ 1535 года в итальянском городе Болонья состоялся публичный диспут-поединок между профессором Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья, занимавшим кафедру математики в Вероне, и неким Фиоре. В то время такие состязания были явлением нередким. Противники предлагали друг другу заранее оговоренное число задач, и тот, кто успешнее справлялся с ними за отведенные несколько часов, объявлялся победителем. Он награждался обусловленным денежным призом и получал возможность занять университетскую кафедру, часто за счет побежденного. Подобный порядок вел к тому, что полученные математические результаты хранились авторами в тайне.

Важнейшим математическим достижением XVI века явилось решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени (квадратные уравнения умели решать уже древние). В начале XVI века профессор математики Болонского университета Сципион дель-Ферро нашел метод решения уравнений вида

$$x^3+px+q=0 \qquad (1)$$

с $p>0$. Легко сообразить, что при этом условии уравнение (1) имеет единственное действительное решение, поскольку если его записать в эквивалентном виде

$$x^3=-px-q,$$

то становится очевидным строгое возрастание от $-\infty$ до $+\infty$ функции в левой части и строгое убывание от $+\infty$ до $-\infty$ функции в правой части. Быть равными они могут, следовательно, лишь при одном значении аргумента, причем это обязательно происходит.

Свое открытие дель-Ферро держал, разумеется, в строгом секрете и лишь незадолго до смерти в 1526 году сообщил его двум своим ученикам, одним из которых и был Фиоре. К 1535 году Тарталья был достаточно известным математиком. Прозвище свое — «заика» — он получил из-за невнятной речи (в детстве, когда его родной город Брешия в 1512 году заняли французские войска, он был ранен в лицо). Получив вызов, Тарталья понял, что Фиоре знает метод решения уравнения (1). Упорно работая день и ночь, Тарталья за 8 дней до диспута нашел этот метод. В результате за два часа 20 февраля 1526 года он решил все 30 задач, предложенных ему Фиоре и оказавшихся, как и предполагалось, уравнениями вида (1). А Фиоре не смог решить ни одной из 30 задач, выбранных Тартальей из различных разделов математики.

Попытаемся реконструировать ход рассуждений Тартальи. Запишем очевидное тождество

$$(u+v)^3-3uv(u+v)-\left(u^3+v^3\right)=0. \qquad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) легко заметить, что $x=u+v$ является решением (1), если

$$\begin{cases} p=-3uv, \\ q=-\left(u^3+v^3\right), \end{cases} \qquad (3)$$

или

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3=u^3v^3, \\ q=-\left(u^3+v^3\right). \end{cases} \qquad (4)$$

Если исключить из (4) v^3 или u^3, то видно, что u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \qquad (5)$$

с положительным при $p>0$ дискриминантом

$$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Следовательно,

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

и окончательно

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \qquad (6)$$

Это и есть формула, полученная Тартальей, установленная ранее дель-Ферро, но называемая формулой Кардано — по имени еще одного итальянца, впервые опубликовавшего ее в 1545 году в сочинении «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге».

Теперь о задачах Фиоре. Сомнительно, что он мог предложить Тарталье уравнения, решением которых является целое число, например $x^3+6x-7=0$. Разумеется, как это в то время было принято, коэффициенты уравнений выбирались целыми. Целые решения можно подобрать, так как для уравнения (1) целые решения являются делителями свободного члена q. Процедура подбора, конечно, затрудняется, если в (3) взять значение u большим положительным, а v — малым отрицательным целыми числами, причем так, чтобы $u+v$ имело много делителей. Например, если $u=25$, $v=-1$, то по (3) число $24=25+(-1)$ является корнем уравнения $x^3+75x-15624=0$. Однако сомнительно, чтобы Фиоре рискнул оставить сопернику шанс найти решение путем подбора. Скорее всего, он подобрал примеры, в которых $\frac{q}{2}$ и $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ — целые и последнее является полным квадратом, однако числа $-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ не являются кубами целых чисел. Используя тройки пифагоровых чисел, т.е. таких целых, что $a^2+b^2=c^2$, и выбирая те из них, в которых одно из двух меньших чисел является кубом, подобные примеры можно строить. Возможно и комбинирование таблиц квадратов и кубов натуральных чисел. Например, при $q=-2$, $p=6$ получаем уравнение

$$x^3+6x-2=0. \qquad (7)$$

По (6) единственным действительным решением уравнения (7) является число $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$. Не представляет труда непосредственным подсчетом это проверить, причем секрет формулы (6) не раскрывается:

$$\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^3+6\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^3-2=$$

$$=4-3\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2+$$

$$+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}-2=$$

$$=-3\sqrt[3]{32}+3\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}=$$

$$=-3\cdot2\sqrt[3]{4}+3\cdot2\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}=0.$$

Приведем еще несколько примеров с подобными свойствами:

$$x^3+9x-6=0,\ x=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3};$$

$$x^3-12x-20=0,\ x=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4};\ (8)$$

$$x^3+15x-20=0,\ x=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}.$$

С большой степенью уверенности можно утверждать, что уравнения (7), (8) были среди тридцати, которые должен был на диспуте решить Тарталья.

Обсудим теперь вопрос о том, насколько частным является разобранный выше случай кубического уравнения, и попытаемся найти все целые значения p и q такие, что дискриминант $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ есть точный квадрат.

Произвольное уравнение третьей степени

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,\ a_0\neq0\quad(9)$$

делением на a_0 приводится к виду

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0.$$

Если в этом уравнении положить $x=y-\frac{b_1}{3}$, то получим

$$y^3-b_1y^2+\frac{b_1^2}{3}y-\frac{b_1^3}{27}+b_1y^2-\frac{2}{3}b_1^2y+$$

$$+\frac{b_1^3}{9}+b_2y-\frac{b_1}{3}+b_3=$$

$$=y^3+\left(b_2-\frac{b_1^2}{3}\right)y+\left(\frac{2}{27}b_1^3-\frac{b_1}{3}+b_3\right)=$$

$$=y^3+py+q=0.$$

Поэтому изучение уравнения (1) позволяет исследовать и уравнения (9). Для $x\neq0$

$$x^3+px+q=x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)$$

и при достаточно больших значениях $|x|$ выражение в скобках положительно, а знак x^3+px+q совпадает со знаком x. В силу этого уравнение (1) при любых p и q имеет по крайней мере один действительный корень x_1. По теореме Безу имеем

$$x^3+px+q=(x-x_1)\left(x^2+x_1x-\frac{q}{x_1}\right)$$

при $x_1\neq0$. Если же $x_1=0$, то $q=0$ и (1) принимает вид $x^3+px=0$, откуда $x\left(x^2+p\right)=0$ и решение не представляет труда. Уравнение $x^2+x_1x-\frac{q}{x_1}=0$ имеет два, возможно и совпадающих, действительных корня или вообще не имеет действительных корней. Допустим, имеется три действительных корня. По теореме Безу тогда

$$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$

$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+$$

$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3,$$

откуда

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p,\\ -x_1x_2x_3=q.\end{cases}\qquad(10)$$

Считаем $q\neq0$, так как в противном случае один из корней равен нулю и исследование тривиально. Исключение из (10) с помощью первого уравнения величины x_3 приводит к системе

$$\begin{cases}x_1x_2-(x_1+x_2)^2=p,\\ x_1x_2(x_1+x_2)=q.\end{cases}\qquad(11)$$

В силу первого из уравнений (10) два корня уравнения (1), скажем x_1 и x_2, имеют совпадающие знаки, а x_3 — противоположный им знак. Тогда $x_1x_2>0$. Очевидно, что

$$p=x_1x_2-(x_1+x_2)^2=$$

$$=-\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=$$

$$=-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2-\frac{3}{4}x_2^2<0.$$

Итак, если уравнение (1) имеет три действительных ненулевых корня, то $p<0$. Из второго уравнения (11)

$$(x_1x_2)^2(x_1+x_2)^2=q^2$$

и, используя неравенство между средними арифметическим и геометрическим,

$$(x_1+x_2)^2\geq4x_1x_2,$$

откуда

$$(x_1x_2)^3\leq\frac{q^2}{4}.\qquad(12)$$

Преобразуем дискриминант, учитывая (11) и (12):

$$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=$$

$$=\frac{q^2}{4}+\frac{\left(x_1x_2-q^2(x_1x_2)^{-2}\right)^3}{27}=$$

$$=\frac{4(x_1x_2)^9+15q^2(x_1x_2)^6}{108(x_1x_2)^6}+$$

$$+\frac{12q^4(x_1x_2)^3-4q^6}{108(x_1x_2)^6}=$$

$$=\frac{\left((x_1x_2)^6+4q^2(x_1x_2)^3+4q^4\right)\left(4(x_1x_2)^3-q^2\right)}{108(x_1x_2)^6}=$$

$$=\frac{\left((x_1x_2)^3+2q^2\right)^2\left((x_1x_2)^3-\frac{q^2}{4}\right)}{27(x_1x_2)^6}\leq0.$$

Следовательно, если уравнение (1) имеет три действительных корня, то дискриминант $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\leq0$. Если $D=0$, то по (6) имеем $x_3=-\sqrt[3]{4q}$, а $p=-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{q^2}$. Следовательно,

$$x^3+px+q=x^3-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}x+q=$$

$$=\left(x+\sqrt[3]{4q}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{4q}x+\frac{1}{4}\sqrt[3]{(4q)^2}\right)=$$

$$=\left(x+\sqrt[3]{4q}\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}\right)^2$$

и $x_1=x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$. Итак, при $q\neq0$, $D=0$

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q},\ x_3=-\sqrt[3]{4q},\ (13)$$

т.е. уравнение (1) имеет два совпадающих из трех действительных корней. Если $q\neq0$, $D<0$, то (1) имеет три действительных попарно различных корня. Наконец, при $q\neq0$, $D>0$ уравнение (1) имеет один действительный корень, вычисляемый по формуле (6).

При $D<0$ формула (6) позволяет найти все три действительных корня уравнения (1), однако для этого приходится использовать комплексные числа. Можно показать, что

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\ (14)$$

$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right),$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{q}\sqrt{-D}\right).$$

Формулы (14) не были известны в XVI веке. Однако и в XX веке они не производят приятного впечатления, поскольку, например, для уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$, корнями которого, как легко проверить, являются числа 1, 2 и −3, формулы (14) приходится использовать при $D = -\frac{100}{27}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)$, $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Теперь о целых значениях p и q таких, что $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ есть квадрат целого числа. Очевидно, что в этом случае q делится на 2, а p — на 3. Введя обозначения $r = \frac{q}{2}$, $s = \frac{p}{3}$, $n = \sqrt{D}$, приходим к задаче решения в целых числах уравнения (диофантова)

$$r^2 + s^3 = n^2. \qquad (15)$$

Легко видеть, что если $(r;\ s;\ n)$ — решение (15), то $(\pm r;\ s;\ \pm n)$ и $(\pm n;\ -s;\ \pm r)$ — также решения этого уравнения. Следовательно, достаточно искать натуральные решения (15).

Непосредственно проверяется, что $\left(\frac{s(s-1)}{2}; s; \frac{s(s+1)}{2}\right)$ при всех $s = 2, 3, \ldots$ есть решение (15). Если $s^3 = p_1^3 p_2^3 \ldots p_\nu^3$, где $1 < p_1 \le p_2 \le \ldots p_\nu$ — простые числа, то записывая s^3 в виде произведения двух сомножителей одной четности, т.е. в виде

$$s^3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2,\ \sigma_2 - \sigma_1 = 2l \qquad (16)$$

(причем для нечетных s используется и представление $s^3 = 1 \cdot s^3$), непосредственно убеждаемся в том, что $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)$ — решение (15). Действительно,

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 = \sigma_1\sigma_2 = s^3.$$

Таким образом, все натуральные решения уравнения (15) даются формулой

$$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right), \qquad (17)$$

где

$$\sigma_1\sigma_2 = s^3,\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \in \mathbf{N},\ \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \in \mathbf{N}.$$

Формула (17) позволяет получать для уравнений вида (1) решения типа $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, а также находить сами такие уравнения.

Решения (15) можно получить и из тождества

$$\left(u\left(u^2 + 3v^2\right)\right)^2 + \left(v^2 - u^2\right)^3 = \\ = \left(v\left(3u^2 + v^2\right)\right)^2.$$