Самоподобные мозаики

Н.ДОЛБИЛИН

ПЕРЕД чтением этой статьи небесполезно ознакомиться со статьей «Игра «Хаос» и фракталы» («Квант» № 4 за 1997 г.). В той статье упоминалось, что многие фракталы самоподобны. Однако прежде чем рассматривать самоподобные фракталы, разумно обратиться к более простым примерам самоподобных объектов – мозаикам. Один из первых и знаменитых примеров самоподобных мозаик был построен английским физиком Роджером Пенроузом. После открытия в 1984 году физических квазикристаллов узоры Пенроуза стали общепринятой моделью для изучения их геометрических свойств. Новые неожиданные связи этих разбиений с некоторыми другими разделами математики были обнаружены американскими математиками Джоном Конвеем и Билом Терстоном. Явление самоподобия играет важную роль в современных областях математики, таких как динамические системы, фракталы, квазикристаллы.

Самоподобные фигуры

Хорошо известно, что треугольник разбивается средними линиями на четыре равных между собой треугольника (рис.1). Каждый из них подобен исходному. В этом смысле треугольник является самоподобной фигурой.

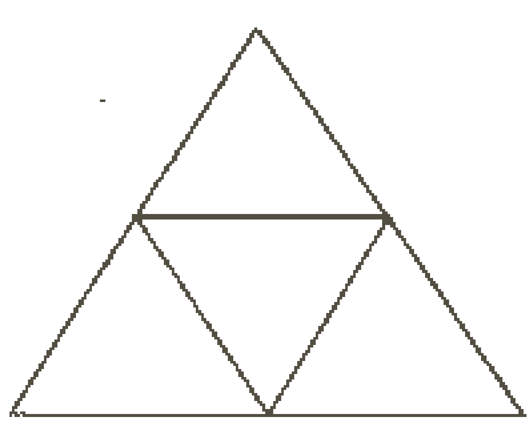


Рис. 1

Фигуру F называют *самоподобной*, если ее можно разрезать на несколько фигур F_1, F_2, ..., F_m, каждая из которых подобна исходной.

Так как каждое слагаемое F_i подобно фигуре F, то имеется преобразование подобия h_i, которое переводит фигуру F в фигуру F_i: $h_i(F) = F_i$. Коэффициенты k_i, $i = 1, \ldots, m$, этих преобразований подобия не обязательно равны между собой, но все меньше единицы.

Преобразования подобия

Вспомним, что *преобразованием подобия* называется такое преобразование h плоскости (или пространства), при котором расстояние $d(x, y)$ между любыми двумя точками x и y изменяется в некоторое, одно и то же, число k раз:

$$d(x,y) = k \cdot d\big(h(x), h(y)\big), \quad k > 0.$$

В частном случае, когда $k = 1$, преобразование подобия является **движением**. Некоторые из движений, например *параллельный перенос* на ненулевой вектор, перемещают *каждую* точку в некоторую *другую* точку. Другие, например *поворот* g плоскости вокруг точки O на некоторый угол, оставляют точку O на месте. Про такую точку O, что $g(O) = O$, говорят, что она является *неподвижной* точкой преобразования g. Таким образом, **поворот** вокруг точки имеет *единственную неподвижную точку*. Третий тип движений – *отражение* (симметрия) относительно некоторой прямой l – имеет *бесконечно много неподвижных точек*, которые составляют прямую l. Итак, одни движения могут не иметь неподвижных точек, другие могут иметь одну или бесконечно много неподвижных точек.

Положение меняется, когда мы имеем дело с подобием h, не являющимся движением, а именно: когда коэффициент $k (> 0)$ подобия h не равен 1. Тогда преобразование h **имеет неподвижную** точку и притом **единственную**[1].

Благодаря замечательной теореме о неподвижной точке всякое преобразование подобия плоскости с коэффициентом $k \neq 1$ имеет единственную неподвижную точку, скажем точку O. Поэтому преобразование подобия можно представить как гомотетию с центром в точке O и коэффициентом k с последующим поворотом вокруг O на некоторый угол или отражением относительно некоторой прямой, проходящей через O. В частности, такое преобразование может быть «чистой» гомотетией, т.е. может не содержать никакой поворотной составляющей.

Примеры самоподобных фигур

Треугольник

Итак, произвольный треугольник разбивается средними линиями на четыре подобных ему треугольника. Каковы те преобразования подобия, которые переводят исходный треугольник ABC в ему подобные части? Первые три – это гомотетии с центрами в вершинах A_1, A_2, A_3 и коэффициентом $\frac{1}{2}$, и четвертое – это гомотетия с центром в точке пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ и коэффициентом $-\frac{1}{2}$. Последнее преобразование можно представить иначе: как гомотетию в точке пересечения медиан с **положительным** коэффициентом $\frac{1}{2}$ с последующим поворотом вокруг той же точки на 180°.

Прямоугольный треугольник

Если треугольник прямоугольный, то он допускает, как известно, и другое разбиение на два подобных треугольника (рис.2).

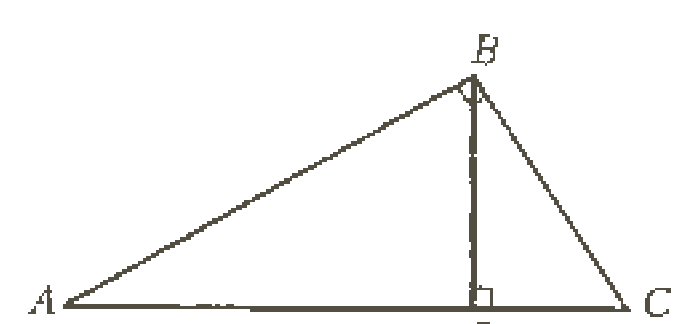


Рис. 2

Рассмотрим преобразование подобия g_1, которое есть произведение **гомотетии** h_1 с неподвижным центром в вершине A и с коэффициентом $k_1 = \frac{AB}{AC}$ и **отражения** относительно биссектрисы угла $\angle BAC$. Ясно, что

$$g_1(\Delta ABC) = \Delta ADB.$$

---

[1] *Эта прекрасная теорема верна не только для преобразований подобия, но и для весьма общих сжимающих отображений вообще, т.е. для таких отображений $f(x)$, когда $d(x,y) \le k \cdot d\big(h(x), h(y)\big)$ при некотором $0 < k < 1$.*

Преобразование g_2, которое переводит треугольник ΔABC в ΔBDC, есть, как легко видеть, произведение **гомотетии** с центром в C и коэффициентом $k_2 = \dfrac{BC}{AC}$ и **отражения** относительно биссектрисы угла $\angle ACB$.

Обратим внимание на одно отличие этого примера от предыдущего. В случае прямоугольных треугольников коэффициенты преобразований различны по абсолютной величине.

«Домино»

Фигура «домино» состоит из двух равных квадратов и может быть опять

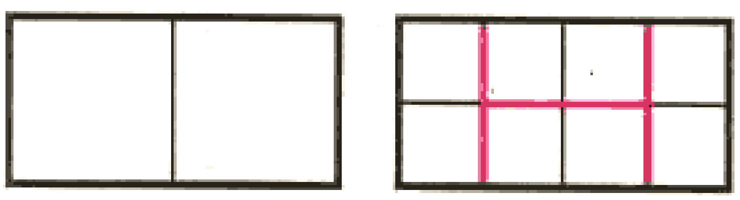


Рис. 3

разрезана на 4 подобные копии (рис. 3).

Задача 1. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i.

«Стул»

Фигура «стул» (триомино) составляется из трех равных квадратов и может быть разрезана на 4 подобных копии F_1, F_2, F_3 и F_4 (рис. 4). Пусть

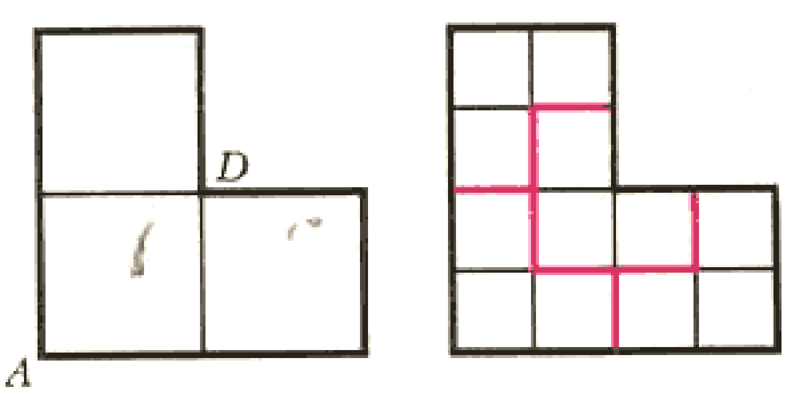


Рис. 4

h_1, h_2, h_3, h_4 — преобразования подобия, которые переводят «большой» стул в соответствующие части. Ясно, что все они имеют коэффициент $\frac{1}{2}$. При этом h_1 и h_2 являются, очевидно, гомотетиями с центрами в точках A и D соответственно.

Задача 2. Определите неподвижную точку для преобразования подобия h_3 (соответственно h_4).

«Сфинкс»

«Сфинкс» (гексамино) составляется из 6 правильных треугольников (рис. 5) и может быть разбит на 4 подобные копии (рис. 6).

Задача 3. Определите неподвижную точку для каждого из преобразований подобия h_i.

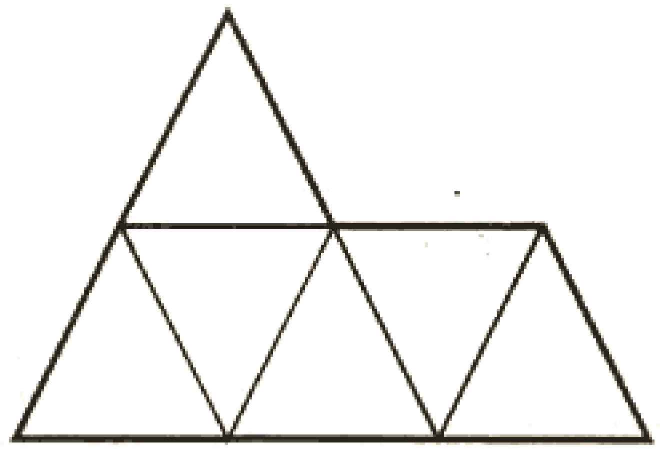


Рис. 5

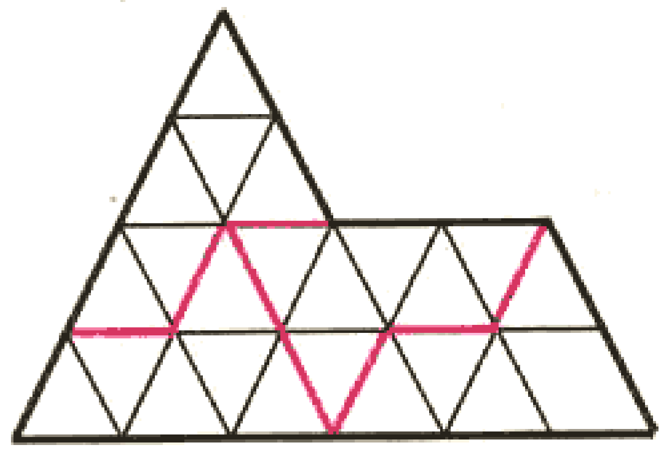


Рис. 6

Самоподобные фигуры и мозаики

Рассмотрим на плоскости какую-нибудь «хорошую» самоподобную фигуру F без дыр, такую как, например, треугольник или параллелограмм или еще какой-нибудь самоподобный многоугольник, который допускает разбиение на подобные ему и в то же время попарно равные между собой фигуры. Тогда копиями фигуры F можно замостить всю плоскость без пропусков и перекрытий. Замощение *всей* плоскости плитками без перекрытий называют *мозаикой*. Если все плитки в мозаике попарно равны, то мозаика называется *моноэдральной*.

Как получить моноэдральную мозаику, исходя из самоподобной фигуры F? Имеется несколько путей. Один из них, на первый взгляд, кажется наиболее простым, хотя в действительности содержит каверзный момент. Возьмем, например, «стул» F определенного размера (рис. 7, *а*) и

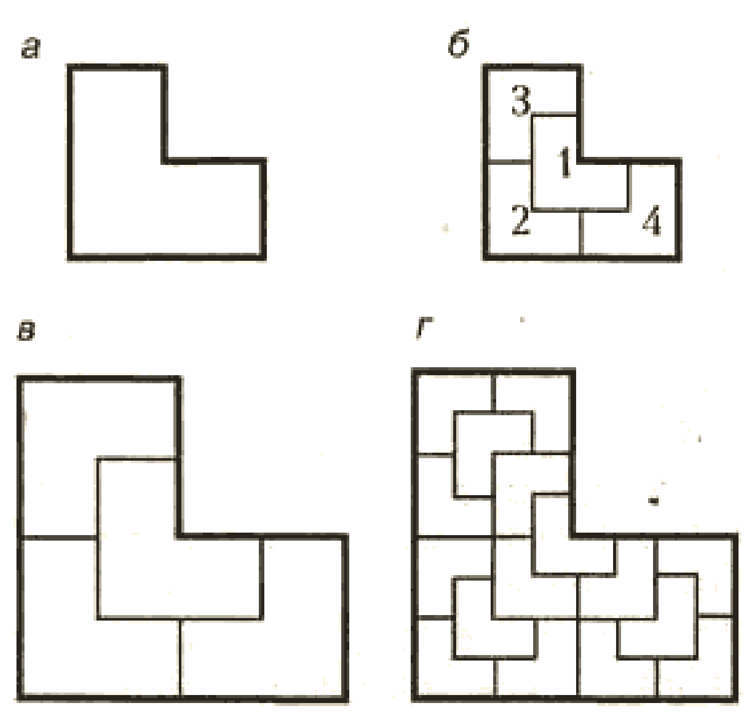


Рис. 7

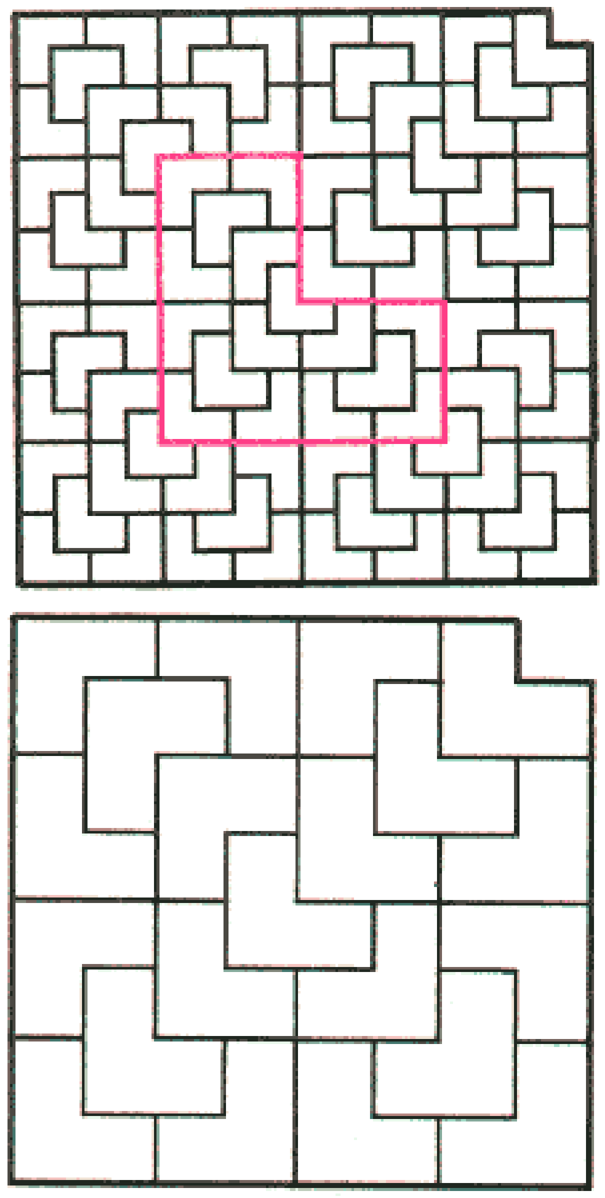
разобьем его на четыре «стульчика», каждый вдвое меньшего размера (рис.7, *б*). Увеличим эту картинку вдвое так, чтобы каждый «стульчик» вырос до размеров оригинала (рис.7, *в*). Затем разрежем каждый из четырех «стульев» опять на четыре «стульчика» (рис.7, *г*) и опять получившееся увеличим вдвое. Повторяя эту процедуру опять и опять, мы получаем неограниченно расширяющуюся Г-образную область, состоящую из равных «стульев».

Эта процедура имеет странное название: «дефляция — инфляция». Знакомое всем нам слово «инфляция» соответствует этапу укрупнения плиток, а менее привычное — «дефляция» — подразбиению укрупненных на предыдущем этапе плиток на более мелкие плитки. «В пределе», как часто говорят, этот процесс (будем обозначать его как «ди-процесс») приводит к моноэдральной мозаике. Но как раз «переход к пределу» и содержит упомянутый выше каверзный момент. Собственно, о каком «пределе» здесь идет речь? Очевидно, что в результате ди-процесса мы получаем *возрастающую по размерам* последовательность кусков плоскости, уложенных плитками. Однако эта последовательность не есть последовательность фрагментов, вырастающих следующий из предыдущего по мере того, как мы добавляем к уже уложенной мозаике новые и новые плитки. Тем не менее можно доказать, что самоподобным многоугольником всегда можно замостить плоскость.

Мозаика, полученная посредством самоподобной фигуры F, называется **самоподобной**, если

- плитки этой мозаики (будем говорить, что это — плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня, причем так, что плитки 2-го уровня опять составляют мозаику (рис. 8, *а*);
- такое последовательное укрупнение возможно для любого k-го уровня (рис. 8, *б*).

В силу этого самоподобные мозаики называют также *иерархическими*, понимая под этим иерархию, которая существует между плитками предыдущего и последующего уровней. Однако иерархия может быть как «строгой», так и «слабой». При *строгой* иерархии мозаика каждого слеа

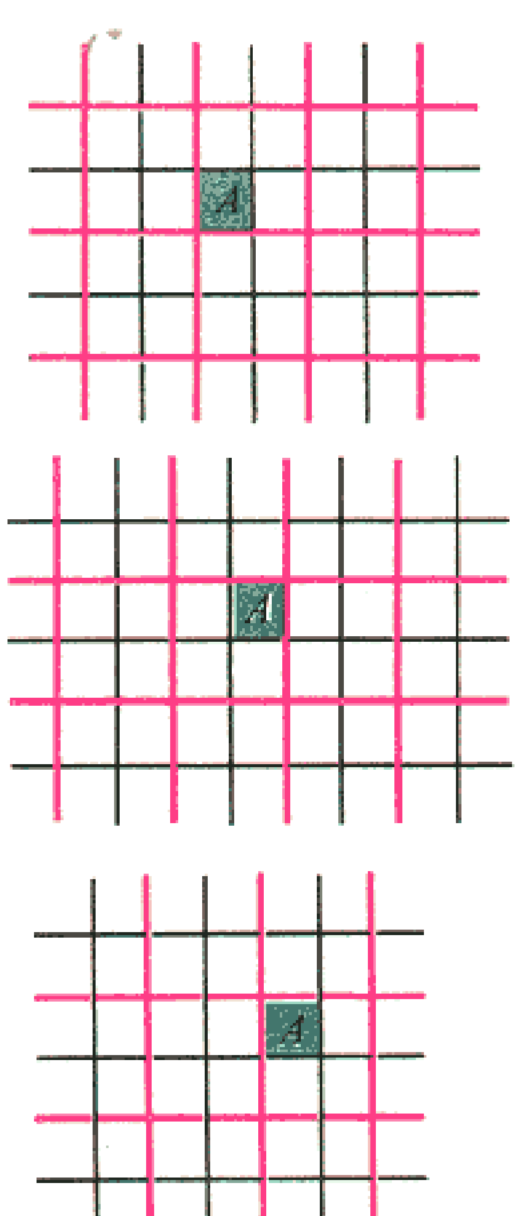


б

Рис. 8

дующего уровня компонуется из плиток мозаики предыдущего уровня *единственным* способом. При *слабой* иерархии плитки мозаики могут объединяться в плитки мозаики следующего уровня *несколькими разными* способами.

Строгий или слабый характер иерархии во многом определяется самой фигурой F. Так, квадрат определяет слабую иерархию. Действительно, мозаика из квадратов (рис.9, *а*) может быть укрупнена в мозаику 2-го уровня разными способами, так что данный квадрат A 1-го уровня может входить в плитки мозаики 2-го уровня различными способами (рис.9, *б*, *в*).



а б в

Рис. 9

А вот «стул», «сфинкс», «домино» определяют строгую иерархию. Возьмем какую-нибудь плитку «стул» в соответствующей мозаике. Он вместе с тремя другими «стульями» объединяется в «стул» 2-го уровня, причем каждая плитка 1-го уровня определяет тройку дополнительных плиток однозначно.

Тем самым укрупненная мозаика 2-го уровня определяется однозначно. Так как мозаика 2-го уровня обладает тем же свойством, то самоподобное разбиение плоскости на «стулья» — строго иерархическое.

Свойства строго иерархических мозаик

Строго иерархические мозаики обладают рядом удивительных свойств, отличающих их от слабо иерархических.

Непериодичность

Мозаика, для которой можно указать хотя бы один параллельный перенос, перемещающий ее в себя, называется *периодической*.

Слабо иерархические мозаики, как это видно на примере квадратной мозаики, могут быть периодическими. Так, любая плитка квадратной мозаики может быть параллельно перенесена в любую другую плитку вместе со всей мозаикой.

Важнейшее отличие строго иерархических мозаик — в том, что все они **непериодичны**. Причина непериодичности строго иерархических мозаик проста. Действительно, предположим, что существует параллельный перенос **t**, который передвигает всю строго иерархическую мозаику в себя. Ясно, что перенос **t** перемещает каждую плитку F_1 мозаики в какую-то другую плитку F_2. В силу однозначной определенности следующей мозаики из плиток 2-го уровня параллельный перенос **t** перемещает в себя также мозаику 2-го уровня и, вообще, мозаику любого k-го уровня. Опять, в силу того, что плитки мозаики второго уровня однозначно составляются в плитки мозаики 3-го уровня, параллельный перенос **t**, перемещающий в себя мозаику 2-го уровня, перемещает в себя мозаику 3-го уровня, и, вообще, мозаику любого уровня k.

Плитка k-го уровня в 2^{k-1} раз больше плитки мозаики 1-го уровня. Поэтому, если в плитку 1-го уровня можно поместить круг диаметром, скажем, d (рис.10, *а*), то в плитку k-го уровня можно поместить круг диаметром $2^{k-1}\cdot d$. При достаточно большом значении k диаметр $2^{k-1}\cdot d$ превзойдет длину вектора переноса

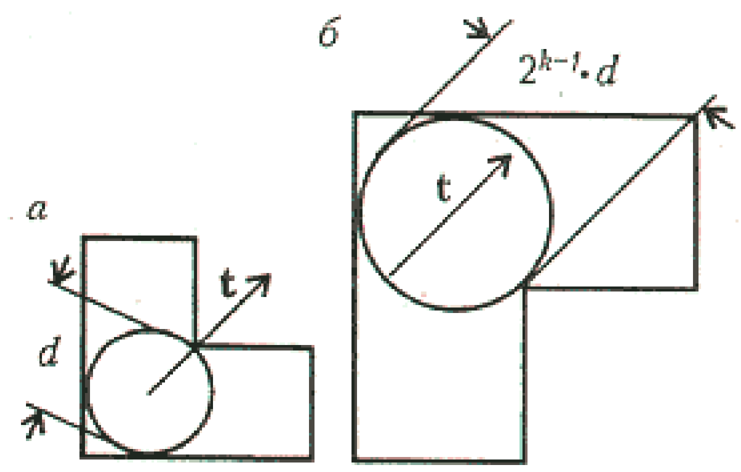


Рис. 10

t (рис.10, *б*). Это означает, что перенос на вектор **t** переводит круг радиуса $2^{k-1}\cdot d$ в круг такого же радиуса, перекрывающийся с первым. С другой стороны, эти круги должны принадлежать *разным* плиткам k-уровня и потому круги не могут пересекаться. Почему *разным*? Дело в том, что никакая *ограниченная* фигура, как нетрудно видеть, при параллельном переносе не может переходить в себя. А так как различные плитки мозаики k-го уровня не перекрываются друг с другом, то тем более не перекрываются и содержащиеся в них круги. Пришли к противоречию.

Итак, все строго иерархические мозаики непериодичны. В то время как периодические мозаики являются удобной моделью для кристаллов, строго иерархические мозаики играют важную роль в изучении квазикристаллических структур, которые были обнаружены в природе чуть более 10 лет тому назад. В отличие от кристаллических, эти структуры уже непериодичны. В частности, знаменитые узоры Пенроуза (рис.11), являющиеся наиболее известной геометрической моделью квазикристалла, представляют собой прямое обобщение строго иерархической мозаики.

«Все — на одно лицо»

Теперь еще об одной особенности мозаик со строгой иерархией. Так

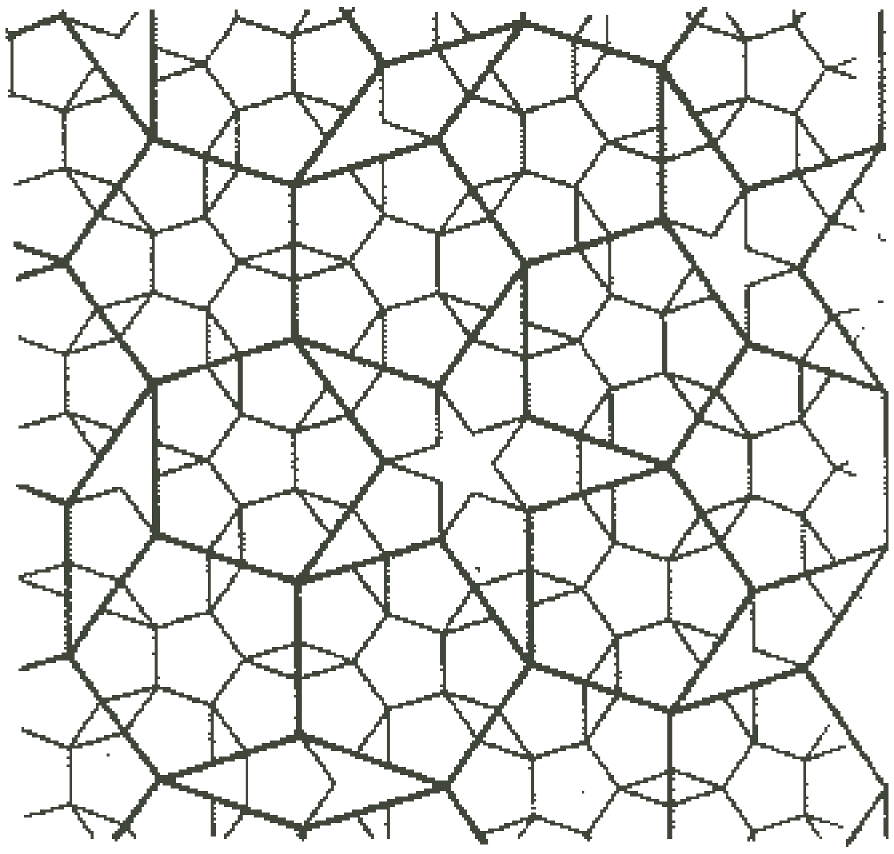


Рис. 11

как в этом случае восстановление мозаики каждого следующего уровня по предыдущему происходит вполне однозначно, то строго иерархическая мозаика, например такая, как «стул», на первый взгляд, должна определяться однозначно. Однако, как раз наоборот, разных самоподобных мозаик, составленных из плиток «стул», бесконечно много. Более того, их даже несчетно много. Уточним, что две (бесконечные) мозаики на плоскости считаются *одинаковыми*, если одну из них можно совместить с другой некоторым движением плоскости. В противном случае мозаики считаются разными.

Объясним, например, почему из «стульев» получается несчетное множество самоподобных мозаик. Разобьем «стул» на 4 «стульчика» и каждому из них припишем одно из четырех чисел 1, 2, 3 или 4, как показано на рисунке 7, б. Пусть «стул» на первом этапе ди-процесса входит в больший «стул» под номером a_1. В свою очередь, на 2-м этапе ди-процесса этот «стул» входит под некоторым номером a_2 в «стул» следующего уровня и т.д. Таким образом, мозаика, вырастающая из данного «стула», определяет некоторую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, состоящую из чисел 1, 2, 3, 4. Та же мозаика может вырасти из любой другой ее плитки. При этом получится другая последовательность. Так как число плиток в данной мозаике счетно, а различных последовательностей несчетно много, то и различных самоподобных мозаик из «стульев» несчетно много.

Так как строго иерархических мозаик, которые можно составить из данной самоподобной плитки, **несчетно много**, то все такие мозаики нельзя занумеровать одними лишь натуральными числами, как элементы последовательности, но можно «занумеровать» при помощи действительных чисел.

Допустим, что все мозаики из несчетной семьи «Стул» уже получили свои имена в виде действительных чисел, и теперь мы хотели бы составить их семейный альбом. Каждая мозаика — бесконечна, и уместить ее на «фотографии» ограниченного размера невозможно. «Портрет» мозаики — это, разумеется, некоторый ограниченный ее фрагмент. Поэтому портретов у данной мозаики может быть много, даже бесконечно много. Допустим теперь, «фотограф» уже отобрал в этот альбом по портрету для каждой из мозаик, но, забыв вовремя подписать фотографии, написал имена в альбоме наобум. Как это ни удивительно, но по существу никакой крамолы он при этом не совершил. Дело в том, что *любой конечный фрагмент, который можно встретить в какой-нибудь мозаике из семейства «Стул», можно встретить также в* **любой** *другой мозаике из этого семейства*, причем встретить его в каждой мозаике бесконечно много раз.

Таким образом, все строго иерархические мозаики из одной семьи, хотя в целом, т.е. глобально, отличаются друг от друга, локально выглядят как «близнецы-братья».

Мозаики Конвея

Напомним, что самоподобная мозаика может быть периодической. Если же она имеет строгую иерархию, то она непериодическая. Однако несмотря на НЕпериодичность рассматривавшихся нами строго иерархических мозаик плитки в них имели лишь конечное число положений с точностью до параллельного переноса. Так, в случае «домино» все (прямоугольные) плитки «рассыпались» на два класса параллельных друг другу плиток, в случае «стула» — на четыре.

Задача 4. Сколько классов параллельных между собой плиток в иерархической мозаике «сфинкса»?

Вопрос: существует ли мозаика, составленная по-прежнему из идентичных плиток, однако такая, что плитки эти уже ориентированы в мозаике бесконечным числом способов? В 1992 году Конвей предложил самоподобную мозаику со строгой иерархией, в которой все плитки суть равные треугольники, допускающие однако бесконечное число различных ориентаций. Идея очень проста: возьмем прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 и гипотенузой $\sqrt{5}$. Он допускает самоподобное разбиение на 5 равных треугольников (рис.12*а*, *б*). Острый угол α треугольника равен $\alpha = \operatorname{arctg} 1/2$. Указанное разбиение треугольника Конвея индуцирует самоподобные мозаики — мозаики Конвея.

а

б

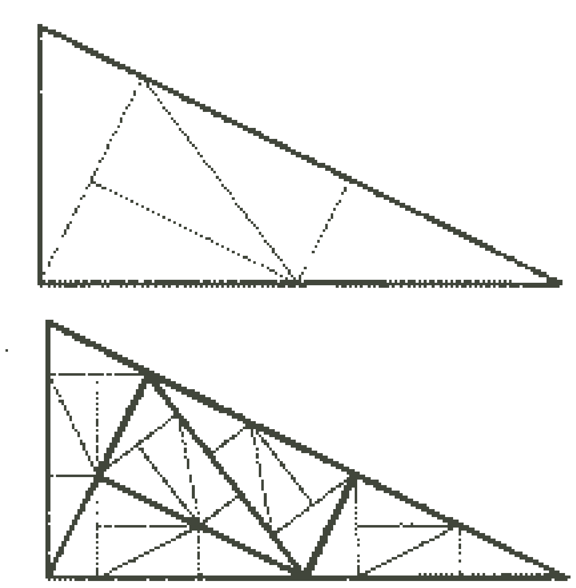


Рис. 12

Легко видеть, что в мозаике Конвея для любой ее треугольной плитки и любого целого m всегда найдется другая плитка, повернутая относительно первой на угол $m \cdot \alpha$. Однако, как можно показать, угол α несоизмерим с 2π (см. задачу ниже). Тогда любые два треугольника, повернутые относительно друг друга на $m \cdot \alpha$, $m \neq 0$, не параллельны друг другу. Поэтому в мозаике Конвея треугольные плитки встречаются в бесконечно многих ориентациях.

В действительности, все мозаики Конвея — самоподобные мозаики со строгой иерархией, поэтому их бесконечно, даже несчетно, много, и во всех них треугольники присутствуют с бесконечно многими ориентациями.

Задача 5. Докажите, что угол $\operatorname{arctg} 1/2$ несоизмерим с π, т. е. что уравнение $n \cdot \operatorname{arctg} 1/2 = m \cdot \pi$ не имеет решений в натуральных числах (m, n).

Отметим еще раз основное свойство мозаики Конвея: для любого возможного положения треугольника Конвея Δ на плоскости и любого маленького положительного значения ε в мозаике Конвея найдется плитка Δ_ε, которая «параллельна» треугольнику Δ с точностью до ε, т.е. углы между соответствующими сторонами треугольников Δ и Δ_ε меньше ε. Другими словами, ориентации плиток в мозаике Конвея распределены всюду плотно во множестве всех возможных ориентаций вообще.

Несколько позже Конвей (совместно с другим математиком Чарльзом Радином) предложил вариант пространственной мозаики, состоящей из равных призм, чьи ориентации распределены «всюду плотно» среди всех возможных ориентаций в пространстве. Ориентацию многогранника в пространстве можно определить при помощи *тройки*, скажем взаимно перпендикулярных, векторов, жестко связанных с перемещаемым многогранником. «Всюду плотность» ориентаций ячеек означает, что для любого положения многогранника P в пространстве и любого заданного наперед сколь угодно маленького $\varepsilon > 0$ найдется такая ячейка P_ε мозаики, что векторы ее тройки составляют с соответствующими векторами из тройки многогранника P углы меньше ε.

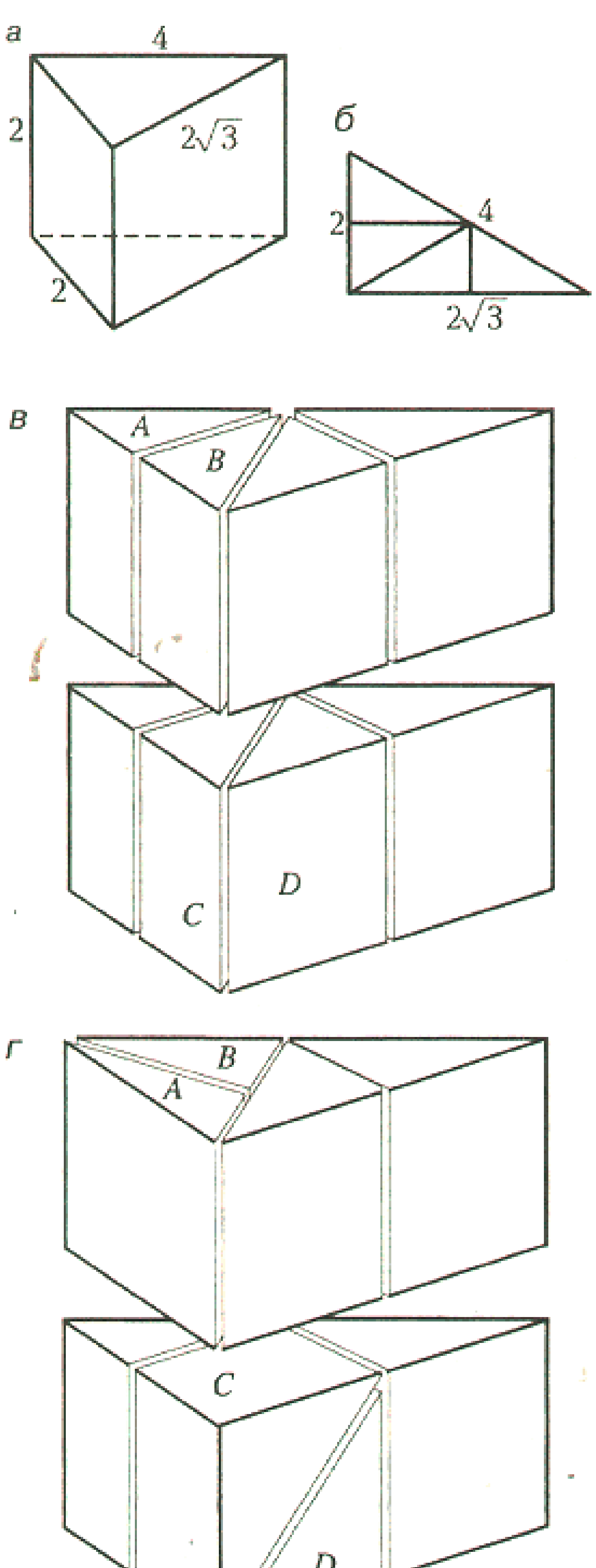


Рис. 13

В качестве исходного объекта берется прямая призма (рис.13, *а*) высотой 2, в основании которой лежит прямоугольный треугольник с катетами 2 и $2\sqrt{3}$ и гипотенузой 4. Этот треугольник разбивается на четыре ему подобных, как указано на рисунке 13, *б*. Поэтому исходная призма (рис. 13, *а*) может быть разбита на **восемь** ей подобных призм (рис.13, *в*). Теперь две призмы A и B на верхнем этаже, взятые вместе, составляют **правильную** треугольную призму. Поэтому эту пару как единое целое можно повернуть на 120° и затем водворить ее на прежнее место (рис.13, *г*). Далее, призмы C и D (рис.13, *в*) на нижнем этаже составляют прямоугольный параллелепипед с квадратной гранью 1×1. Поэтому повернем эту пару на 90° и разместим ее на том же месте (рис.13, *г*).

В итоге мы получили конструкцию Конвея – Радина. Заметим, что в этой конструкции идентичны призмы, повернутые друг относительно друга на 120° и на 90° вокруг взаимно перпендикулярных осей. Самоподобная мозаика из призм Конвея – Радина, которая строится при помощи процесса инфляции-дефляции, наряду с каждой призмой P будет содержать призмы, повернутые относительно P при помощи всевозможных комбинаций вида

$$g_1^{m_1} \cdot g_2^{m_2} \cdot g_1^{m_3} \cdot g_2^{m_4} \ldots g_1^{m_n} \cdot g_2^{m_{n+1}},$$

где g_1 и g_2 – повороты на 120° и 90° вокруг взаимно перпендикулярных осей.

За ориентирующую тройку векторов можно взять три взаимно перпендикулярно направленных ребра призмы, исходящих из вершины прямого угла основания призмы. Сравнительно нетрудно показать, что в силу перпендикулярности осей поворотов g_1 и g_2 множество различных ориентаций должно быть бесконечным. Установить всюду плотность всевозможных ориентаций призм в мозаике Конвея – Радина – задача потруднее. Ее решение требует знания теории групп.

Игра «Хаос» и самоподобные мозаики

Неожиданный и простой способ получения самоподобных мозаик на компьютере дает так называемая игра «Хаос». Она имеет много вариантов, один из них был подробно исследован в статье «Игра «Хаос» и фракталы».

Мы напомним правила игры. В качестве исходного набора преобразований подобия возьмем те, которые переводят треугольник Конвея в пять составляющих его треугольничков. Обозначим их через h_1, h_2, h_3, h_4 и h_5 (см. рис. 12, *б*). Пусть датчик случайных чисел выдает числа 1, 2, 3, 4 или 5. Отметим на плоскости *произвольную* начальную точку x_0.

Шаг 1-й. Предположим, датчик выдал число 2. Пусть $x_1 = h_1(x_0)$.

Шаг 2-й. Предположим, что на датчике выпало число 1. Обозначим через x_2 точку $x_2 = h_1(x_1)$.

Шаг n-й. Пусть уже имеется точка x_{n-1} и на n-й раз выпадает число α_n, где $\alpha_n = 1, 2, 3, 4$ или 5. Тогда, по определению нашей последовательности, $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$.

Действуя таким образом, мы получаем последовательность точек

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Не вдаваясь здесь в причины (читатель может найти их в упомянутой ранее статье), заметим, что результатом выведения на дисплей, скажем, первых двух-трех тысяч точек будет

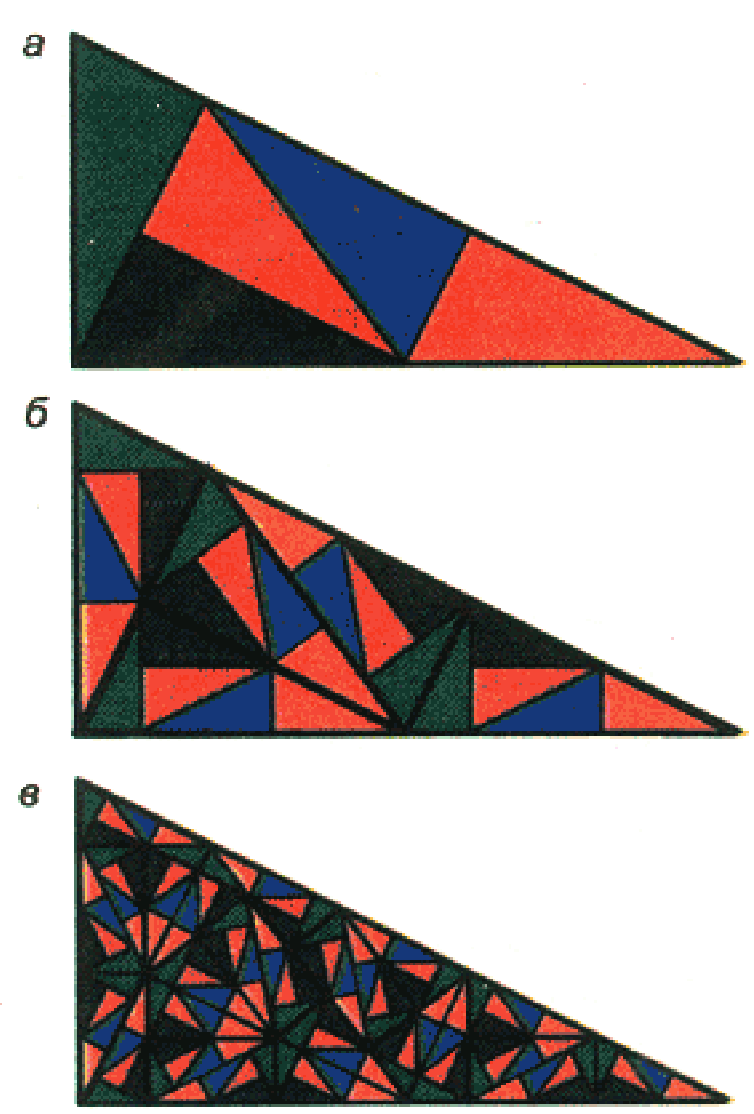


Рис. 14

изображение на экране треугольника Конвея.

И вообще, пусть F — самоподобная фигура, $F = F_1 \cup \ldots \cup F_m$ и $h_1 \ldots h_m$ — преобразования подобия, переводящие фигуру F в подобные составляющие $F_1, \ldots, F_m$. Игра «Хаос» замечательна тем, что, используя в ней преобразования h_i, можно получить на экране фигуру F.

Для того чтобы получить мозаику, будем раскрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в зависимости от значения выпавшего числа α_n. Давайте сопоставим числу 1 зеленый цвет, числу 2 — красный, 3 — синий, 4 — оранжевый и, наконец, 5 — серый. Будем теперь окрашивать точку $x_n = h_{\alpha_n}(x_{n-1})$ в цвет, соответствующий числу α_n. Тогда на дисплее мы получим цветную картинку (рис.14, *а*). Это — первый фрагмент самоподобной мозаики Конвея. Если же точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-1}, то мы получим более детальный портрет той же мозаики в цвете (рис. 14, *б*). Еще более дробный фрагмент получается, если каждую точку x_n окрашивать в цвет, соответствующий номеру α_{n-2} (рис. 14, *в*) и т.д.

Задача Конвея

Подведем некоторые итоги. Итак, если многоугольник самоподобен, то его копиями можно заполнить всю плоскость. Причем если мозаика из этих многоугольников строго иерархична, то она непериодична. Таковы, например, самоподобные мозаики, составленные из «стульев». Однако было бы ошибочно думать, что из «стульев» можно составить лишь непериодические мозаики. На рисунке 15 представлена простенькая мозаика из «стульев», которая является периодической. Таким образом, самоподобные многоугольники наряду со строго иерархическими мозаиками, которые непериодичны, могут допускать также и периодические мозаики.

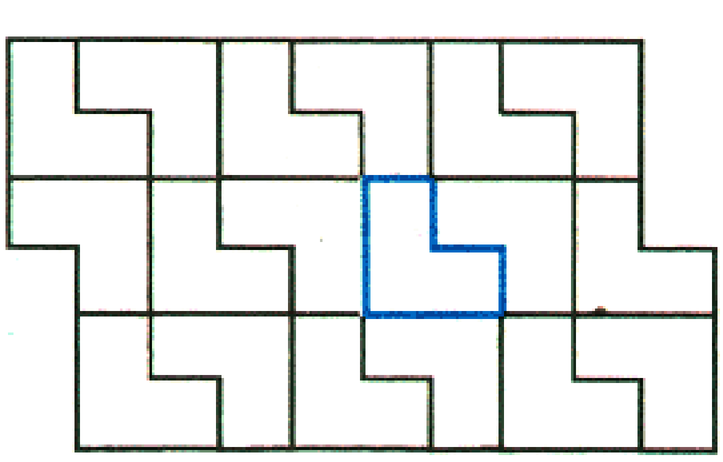


Рис. 15

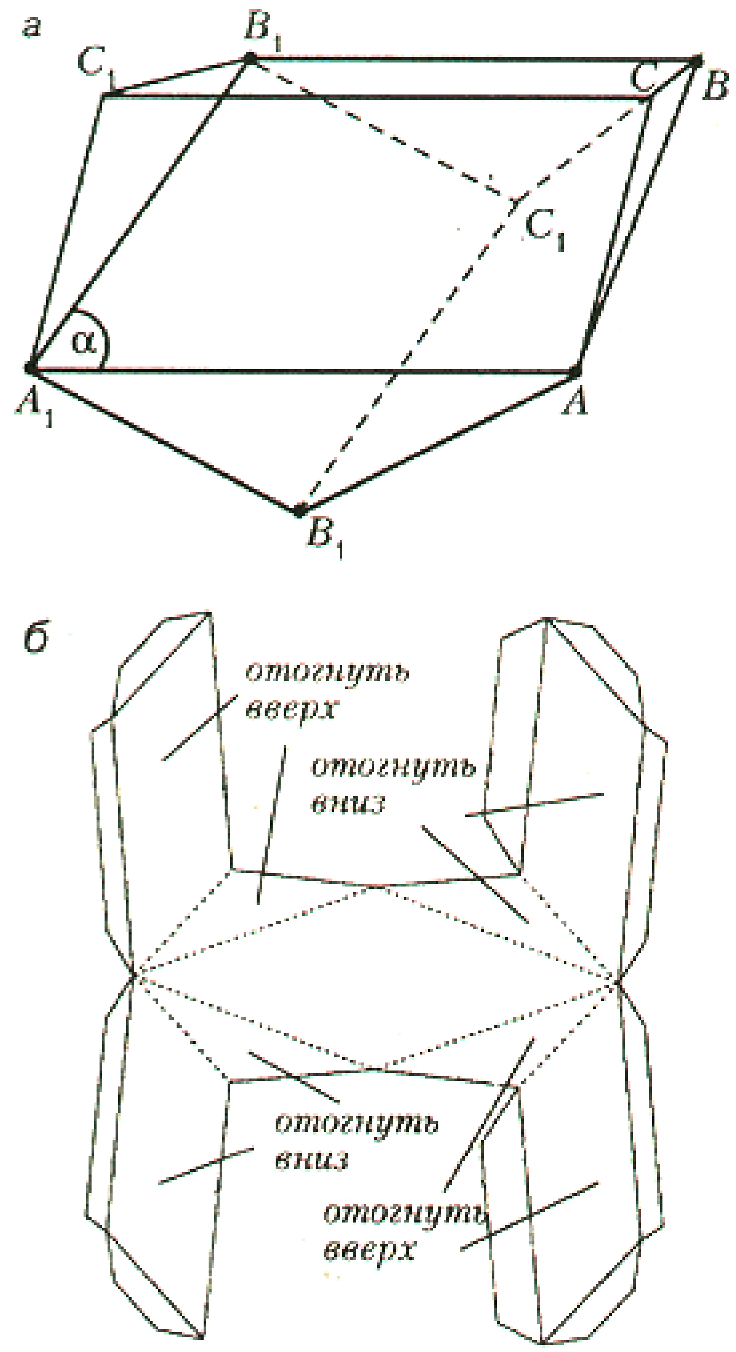


Рис. 16

Джон Конвей поставил вопрос: существует ли на плоскости такая многоугольная или даже криволинейная фигура, из которой можно составить лишь **НЕ**периодические мозаики? Любопытно, что в пространстве на подобный вопрос недавно был получен положительный ответ: да, существует. Это — так называемая бипризма Шмитта — Конвея — Данцера (рис.16, *а*). Склеить ее можно из выкройки, представленной на рисунке 16, *б* (заметим, что это — не развертка многогранника в обычном ее понимании, так как в выкройку входит ромб, который является не гранью призмы, а вспомогательным элементом конструкции).

Бипризма определяется следующим образом. Возьмем сначала треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$, у которой боковая грань ABB_1A_1 есть ромб (с острым углом α). Теперь приставим к ромбовидной боковой грани такую же призму, повернув исходную призму на угол 180° вокруг диагонали ромбической грани. Заметим, что боковые ребра второй призмы составляют угол α с боковыми ребрами первой призмы. Пара так приставленных друг к другу призм составляет искомую *бипризму*.

Нетрудно убедиться в том, что бипризма разбивает пространство, т.е. заполняет его без пропусков и перекрытий. И устройство всех таких мозаик во многом предопределено. Действительно, если мы хотим заполнить пространство такими бипризмами, мы должны прежде всего составить из них слой (рис.17, *а*). Все бипризмы в данном слое параллельны друг другу. Более того, слой представляет собой периодическое семейство бипризм. Далее все пространство заполняется такими слоями (рис.17, *б*). Очевидно, что каждый следующий слой получается из предыдущего поворотом вокруг перпендикулярной (к плоскости слоя) оси на угол, равный острому углу ромба, с последующим параллельным переносом. Поэтому если угол ромба несоизмерим с π, т.е. если $\alpha \neq \frac{m}{n} \cdot \pi$, то никакие две бипризмы из разных слоев не параллельны друг другу. С другой стороны, любой параллель-

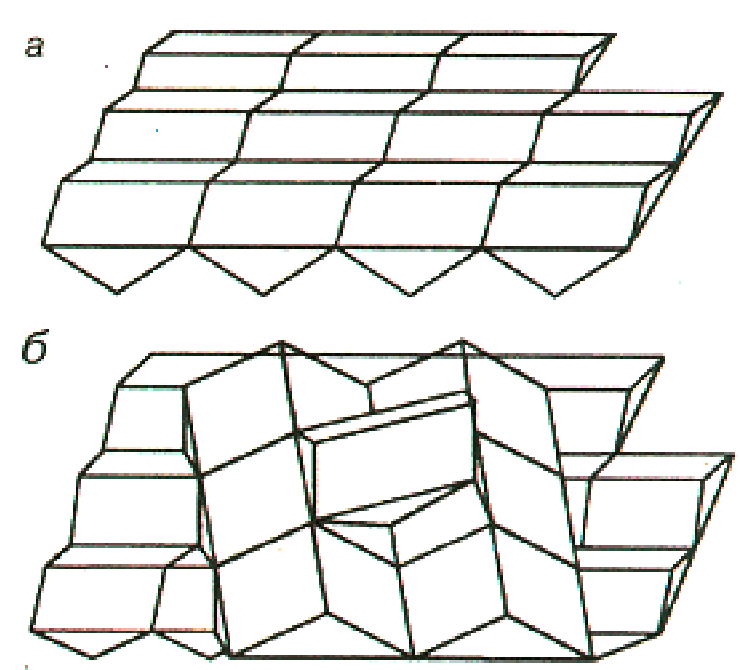


Рис. 17

ный перенос, который совмещает один слой с самим собой, не совмещает, как нетрудно видеть, никакой другой слой с собой. Таким образом, при $\alpha \neq \frac{m}{n} \cdot \pi$ не существует ни одного (!) параллельного переноса, который бы совмещал это разбиение с собой.

Однако неизвестно, существует ли аналогичная фигура на плоскости. Однако не исключено, что таких так называемых *«апериодических»* плиток на евклидовой плоскости нет, т.е. если фигура допускает какие-то мозаики, то среди них будет непременнно и периодическая.

Заметим, что аналог «апериодической» плитки на плоскости Лобачевского уже найден. И будет замечательно, если кто-нибудь из читателей «Кванта» откроет *«апериодическую»* плитку на евклидовой плоскости.