Задачи с распределенной массой

А.ЧЕРНОУЦАН

ДВЕ ОСНОВНЫЕ модели механики — это материальная точка и твердое тело. В отличие от точек, твердые тела могут двигаться не только поступательно, но и вращательно. Поскольку динамику вращательного движения твердого тела в школе не изучают, большинство задач динамики посвящено движению точки. И тем не менее, некоторые школьные задачи (как олимпиадные, так и вступительные) имеют дело с протяженными телами, массу которых нельзя считать сосредоточенной в одной точке.

В этой статье будут рассмотрены разнообразные линейные объекты — веревки (массивные нити), цепочки, струи, масса которых распределена вдоль одной линии. Подход к обсуждению движения таких тел, в сущности, обычный — в основе лежат уравнения динамики точки для небольшого элемента протяженного тела. При этом в одних случаях достаточно записать уравнения динамики для одного-единственного элемента линейного объекта. Главное — правильно этот элемент выбрать. В других случаях возникает необходимость просуммировать уравнения движения, записанные для отдельных элементов, по всей длине. При удачной записи уравнений (при проектировании на удачно выбранные оси) суммирование может оказаться совсем несложным.

Теперь — конкретные задачи.

Задача 1. *Струя воды сечением S ударяется о стенку, расположенную перпендикулярно струе. Скорость воды в струе v, после удара вода теряет скорость и стекает по стенке. Какова сила давления воды на стенку? Плотность воды ρ.*

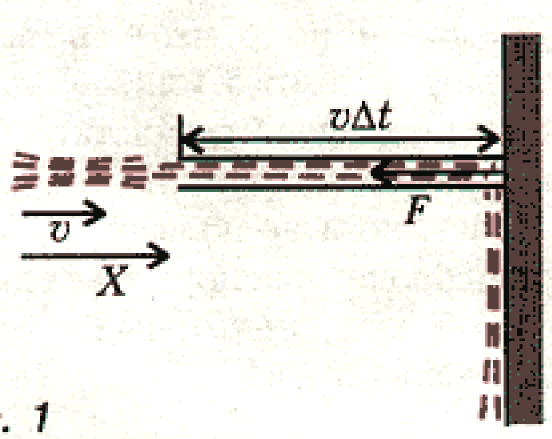

Рис. 1

Изменение импульса воды за время Δt равно импульсу силы реакции, действующей на воду со стороны стенки, а по третьему закону Ньютона эта сила равна по величине искомой силе давления струи на стенку. Изменение импульса воды сводится к изменению импульса элемента струи длиной $\Delta l = v\Delta t$, который за время Δt пришел в соприкосновение со стенкой (рис.1):

$$0 - \Delta m v = -F\Delta t .$$

Подставляя $\Delta m = \rho(v\Delta t)S$ и сокращая на Δt, получаем

$$F = \rho S v^2 .$$

Характерно, что интервал времени Δt и длина элемента струи Δl выбираются произвольно, но в ответ они, конечно же, не входят.

Задача 2. *Космический корабль массой M движется в глубоком космосе. Для управления кораблем используется реактивный двигатель, который выбрасывает реактивную струю со скоростью $\vec{u}$ относительно корабля, причем расход топлива в струе равен μ (расход топлива — это масса топлива, выбрасываемая за единицу времени). Найдите ускорение корабля.*

Изменение импульса замкнутой системы корабль — топливо за время Δt равно нулю. Запишем закон сохранения импульса в системе отсчета, в которой скорость корабля в начале этого интервала времени равна нулю:

$$0 = M\Delta\vec{v} + \mu\Delta t\,\vec{u} ,$$

где $\Delta\vec{v}$ — изменение скорости корабля. Перепишем это уравнение в виде

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\mu\vec{u} .$$

Стоящее в правой части выражение называется *реактивной силой.* Если на корабль действует еще и внешняя сила $\vec{F}$ (например, со стороны поля тяготения), то ускорение корабля $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ вычисляется по формуле

$$M\vec{a} = -\mu\vec{u} + \vec{F} .$$

Это уравнение называется *уравнением Мещерского.* При его решении, вообще говоря, надо учитывать, что масса корабля M уменьшается со временем.

Задача 3. *Тонкая цепочка длиной l и массой m удерживается за верхний конец так, что нижним концом она касается земли. Цепочку отпускают, и она начинает падать. Найдите силу давления цепочки на землю через время t. Цепочка неупругая и мягкая.*

Поскольку цепочка мягкая, сила взаимодействия нижних звеньев с поверхностью не передается верхним, которые свободно падают с ускорением g. К моменту времени t часть цепочки длиной $gt^2/2$ и массой $(m/l)gt^2/2$ лежит на земле, а верхняя часть цепочки падает со скоростью $v = gt$. Сила реакции земли, равная по величине силе давления цепочки, складывается из двух частей. Одна уравновешивает силу тяжести неподвижной части цепочки и равна

$$F_1 = \frac{mg^2t^2}{2l} .$$

Вторая связана с изменением импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\Delta m = (m/l)v\Delta t$ при его соприкосновении с поверхностью и находится из уравнения $F_2\Delta t = \Delta m v$, откуда

$$F_2 = \frac{mv^2}{l} = \frac{mg^2t^2}{l} .$$

Видно, что $F_2 = 2F_1$, а полная сила давления

$$F = \frac{3mg^2t^2}{2l}$$

в три раза больше веса неподвижной части цепочки. Перед самым концом падения эта сила достигает максимального значения $3mg$.

Задача 4. *Длинная тонкая цепочка перекинута через блок так, что ее правая часть свисает до пола, а левая лежит, свернувшись клубком, на уступе высотой H (рис.2). Цепочку отпускают, и она приходит в движение. Найдите установившуюся скорость движения цепочки. Блок идеальный, цепочка неупругая.*

Рассмотрим сначала правую часть цепочки. Поскольку цепочка неупругая и мягкая, взаимодействие с полом нижнего звена не передается верхним. Значит, натяжение цепочки возле пола равно нулю. Так как цепочка при установившемся режиме движется равномерно, натяжение на некоторой высоте h равно весу нижней части цепочки:

$$T_h = \lambda g h ,$$

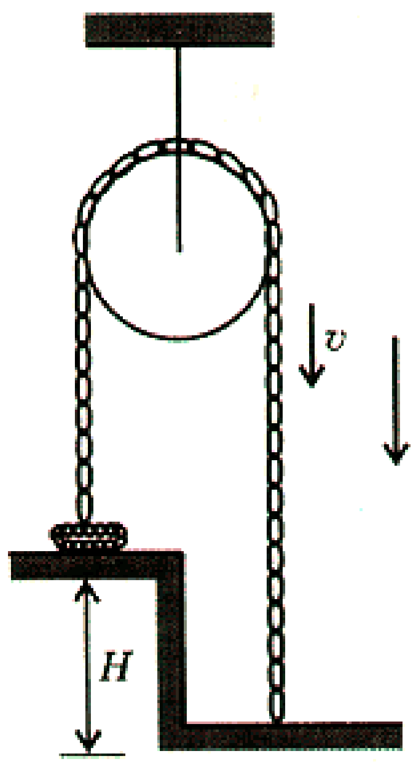

Рис. 2

где λ — масса единицы длины цепочки. Перейдем теперь к левой части цепочки. Натяжение в нижней части, над самым уступом, можно найти, записав изменение импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\lambda v\Delta t$, который за время Δt приходит в движение:

$$\lambda v\Delta t v = T_H\Delta t, \text{ или } T_H = \lambda v^2.$$

При равномерном движении натяжения справа и слева на одном уровне должны быть равны:

$$T_h = T_H,$$

откуда получаем

$$\lambda gH = \lambda v^2, \text{ или } v = \sqrt{gH}.$$

Попробуем решить эту задачу из энергетических соображений. Если быть не очень внимательным, можно легко прийти к противоречию с полученным выше результатом. Казалось бы, при установившемся движении цепочки работа силы тяжести за время Δt должна быть равна выделившемуся за то же время количеству теплоты. Работа равна $\lambda gHv\Delta t$, а количество теплоты, выделяющееся при неупругом ударе о пол элемента длиной $v\Delta t$, равно $\lambda v\Delta t v^2/2$. Однако, если приравнять эти выражения, получим ответ, в $\sqrt{2}$ раз больший предыдущего. В чем же здесь дело?

Оказывается, тепло выделяется не только при неупругом ударе элемента цепочки о пол, но и (хотя это не столь очевидно) при разгоне такого же элемента на уступе до скорости v. Более того, эти количества теплоты оказываются одинаковыми. Это приводит к тому, что общее количество теплоты увеличивается вдвое и лишний $\sqrt{2}$ из ответа исчезает. Действительно, сравним работу силы натяжения при подъеме элемента длиной $v\Delta t$ с уступа: $\lambda v^2(v\Delta t)$ с кинетической энергией, приобретенной этим элементом: $(\lambda v\Delta t)v^2/2$. Видно, что работа в два раза больше, а разность между работой и энергией как раз равна количеству теплоты, которое выделилось при разгоне этого элемента.

Чтобы лучше понять механизм выделения тепла, представим себе, что мы хотим разогнать тело массой m до скорости v при помощи пружины, для чего начнем перемещать конец пружины с постоянной скоростью v. Если пружина идеальная, то скорость тела никогда не установится, так как колебательный процесс никогда не прекратится. Если же пружина не идеальная, то колебания в конце концов затухнут и тело приобретет скорость v. Чтобы узнать, сколько за это время выделилось тепла, надо перейти в систему отсчета, в которой конец пружины покоится. В этой системе начальная кинетическая энергия тела $mv^2/2$ полностью перейдет в тепло. Значит, приобретенная телом кинетическая энергия при разгоне равна количеству теплоты, которое при этом выделяется.

Задача 5. *Тонкое веревочное кольцо массой m и радиусом R положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости ω. Найдите силу натяжения веревки.*

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = m\Delta l/(2\pi R)$, который виден из центра окружности под малым углом $\Delta\varphi = \Delta l/R$ (рис.3). Действующая на элемент сила равна векторной сумме

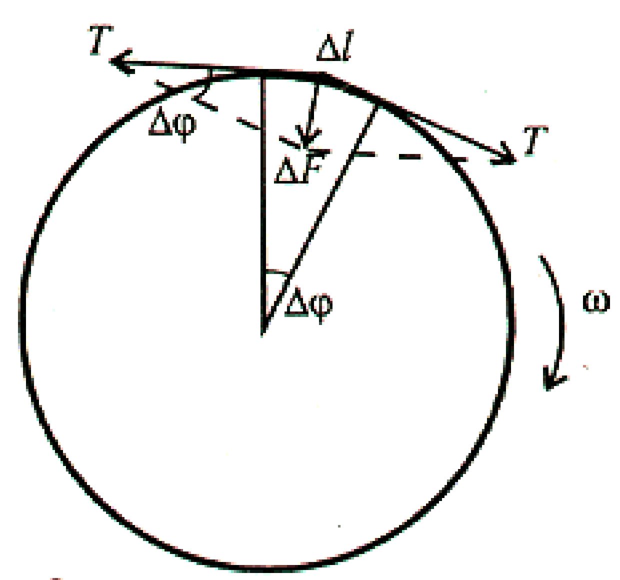

Рис. 3

двух сил натяжения: $\Delta F = T\Delta\varphi$. Из второго закона Ньютона $\Delta F = \Delta m\omega^2 R$ находим

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}.$$

Полученный результат имеет неожиданное применение — с его помощью можно найти положение центра масс (центра тяжести) тонкой однородной полуокружности. Действительно, сила, действующая на вращающуюся полуокружность, равна $2T$, а в уравнение движения входит ускорение центра масс: $2T = (m/2)\omega^2 x$, где x — расстояние от центра окружности до центра масс полуокружности. Подставляя T, получаем $x = 2R/\pi$.

Задача 6. *Веревку длиной l и массой m кладут на гладкое горизонтальное бревно радиусом R (рис.4), причем вначале веревку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу F, а затем отпускают. Определите: а) значение силы F; б) ускорение веревки в первый момент.*

Обозначим через H расстояние по вертикали (разность высот) между верхней и нижней точками веревки. Если

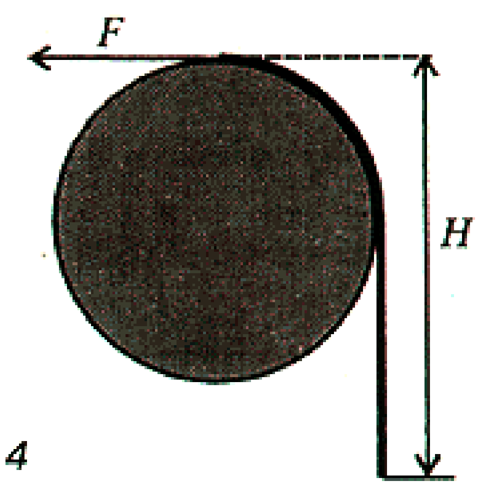

Рис. 4

веревка свешивается с бревна ($l > \pi R/2$), то $H = l - \pi R/2 + R$, если же нет, то $H = R\cos(l/R)$. Как мы увидим, в ответ будет входить только H.

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = (m/l)\Delta l = \lambda\Delta l$ (λ — масса единицы длины веревки) в проекциях на ось,

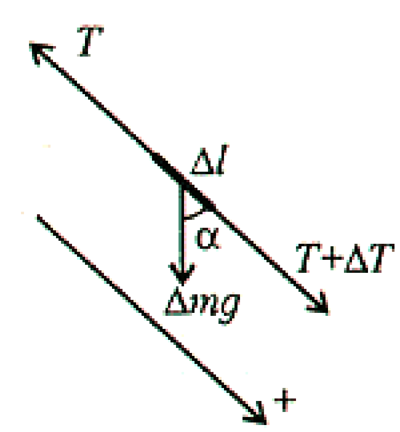

Рис. 5

направленную вдоль этого элемента (рис.5):

$$\Delta T + \Delta mg\cos\alpha = \Delta ma.$$

Здесь ΔT — разность между натяжениями на концах элемента, a — ускорение веревки (в первом случае, пока веревку удерживают, надо положить $a = 0$). Перед тем как просуммировать эти уравнения, заметим, что $\Delta m\cos\alpha = \lambda\Delta l\cos\alpha = \lambda\Delta h$, где Δh — расстояние по вертикали между концами элемента.

Теперь просуммируем уравнения вдоль всей длины веревки. Сумма всех ΔT равна разности сил натяжения на концах веревки, т.е. для неподвижной веревки это $-F$, а для свободной веревки это ноль. В случае а) получаем уравнение

$$-F + \lambda gH = 0, \text{ откуда } F = (m/l)gH.$$

В случае б) —

$$\lambda gH = ma\text{, откуда } a = g(H/l).$$

Эту задачу можно решить и из энергетических соображений, причем в этом случае удается обойтись без суммирования. Начнем с неподвижной веревки. Сместив конец веревки на малое расстояние Δx, мы совершим работу $F\Delta x$, которая должна равняться изменению потенциальной энергии веревки ΔE. Заметим, что для расчета потенциальной энергии можно считать, что вся веревка осталась на месте, а элемент длиной Δx был перенесен с одного конца веревки на другой. Значит, $\Delta E = \lambda \Delta x gH$. Приравнивая изменение энергии к работе, получаем $F = (m/l)gH$. Для свободной веревки надо ΔE приравнять к кинетической энергии, а для определения ускорения — использовать кинематическое выражение $v^2 = 2ax$. Сделайте это сами и, кроме того, подумайте, почему получается $a = F/m$. Если поймете, то вторая часть задачи станет просто продолжением первой.

Задача 7. *Цепочку массой m и длиной l подвесили за концы к потолку (рис.6). При этом оказалось, что в местах закрепления цепочка образует углы α с вертикалью. Найдите расстояние h от нижней точки цепочки до потолка.*

Используя метод суммирования, описанный в предыдущей задаче, найдем

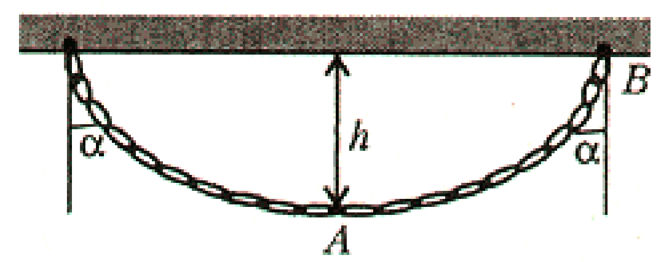

Рис. 6

соотношение между натяжениями в нижней точке A и в верхней точке B:

$$T_B - T_A = (m/l)gh.$$

Кроме того, запишем условия равновесия половины цепочки в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$T_B \sin\alpha = T_A,\ T_B \cos\alpha = \frac{mg}{2}.$$

Выразив отсюда T_A и T_B, подставим их в первое уравнение и получим

$$h = l\,\frac{1-\sin\alpha}{2\cos\alpha}.$$

Упражнения

1. По трубе сечением S движется вода со скоростью v. Найдите силу, с которой вода действует на трубу в том месте, где труба делает поворот на 90°. Плотность воды ρ.

2. Готовясь к прыжку, кобра поднимает голову со скоростью v. Найдите силу давления кобры на землю. Массу кобры m считать равномерно распределенной вдоль туловища длиной l.

3. Через застопоренный блок (который не может вращаться) перекинули веревку длиной l так, что один ее конец находится на Δh выше другого. Считая поверхность блока идеально гладкой, найдите, с каким ускорением начнет соскальзывать веревка.

4. Веревку длиной l закрепили за концы на разных уровнях. Оказалось, что у одного конца веревка образует с вертикалью угол α, а у другого — угол β. На сколько первый конец веревки выше второго?