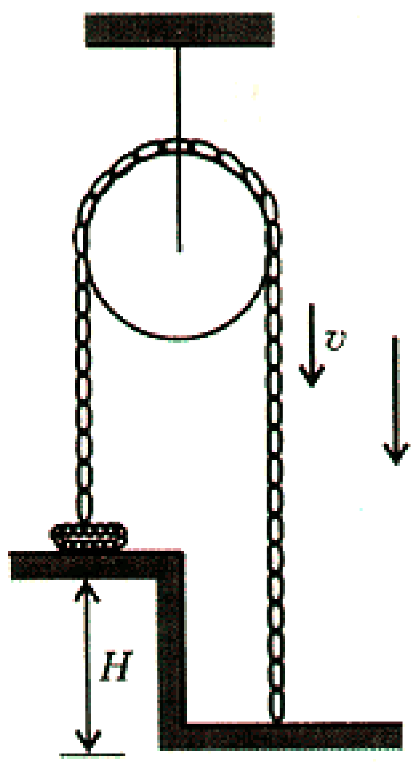

Рис. 2

где λ — масса единицы длины цепочки. Перейдем теперь к левой части цепочки. Натяжение в нижней части, над самым уступом, можно найти, записав изменение импульса элемента цепочки длиной $v\Delta t$ и массой $\lambda v\Delta t$, который за время Δt приходит в движение:

$$\lambda v\Delta t v = T_H\Delta t, \text{ или } T_H = \lambda v^2.$$

При равномерном движении натяжения справа и слева на одном уровне должны быть равны:

$$T_h = T_H,$$

откуда получаем

$$\lambda gH = \lambda v^2, \text{ или } v = \sqrt{gH}.$$

Попробуем решить эту задачу из энергетических соображений. Если быть не очень внимательным, можно легко прийти к противоречию с полученным выше результатом. Казалось бы, при установившемся движении цепочки работа силы тяжести за время Δt должна быть равна выделившемуся за то же время количеству теплоты. Работа равна $\lambda gHv\Delta t$, а количество теплоты, выделяющееся при неупругом ударе о пол элемента длиной $v\Delta t$, равно $\lambda v\Delta t v^2/2$. Однако, если приравнять эти выражения, получим ответ, в $\sqrt{2}$ раз больший предыдущего. В чем же здесь дело?

Оказывается, тепло выделяется не только при неупругом ударе элемента цепочки о пол, но и (хотя это не столь очевидно) при разгоне такого же элемента на уступе до скорости v. Более того, эти количества теплоты оказываются одинаковыми. Это приводит к тому, что общее количество теплоты увеличивается вдвое и лишний $\sqrt{2}$ из ответа исчезает. Действительно, сравним работу силы натяжения при подъеме элемента длиной $v\Delta t$ с уступа: $\lambda v^2(v\Delta t)$ с кинетической энергией, приобретенной этим элементом: $(\lambda v\Delta t)v^2/2$. Видно, что работа в два раза больше, а разность между работой и энергией как раз равна количеству теплоты, которое выделилось при разгоне этого элемента.

Чтобы лучше понять механизм выделения тепла, представим себе, что мы хотим разогнать тело массой m до скорости v при помощи пружины, для чего начнем перемещать конец пружины с постоянной скоростью v. Если пружина идеальная, то скорость тела никогда не установится, так как колебательный процесс никогда не прекратится. Если же пружина не идеальная, то колебания в конце концов затухнут и тело приобретет скорость v. Чтобы узнать, сколько за это время выделилось тепла, надо перейти в систему отсчета, в которой конец пружины покоится. В этой системе начальная кинетическая энергия тела $mv^2/2$ полностью перейдет в тепло. Значит, приобретенная телом кинетическая энергия при разгоне равна количеству теплоты, которое при этом выделяется.

Задача 5. *Тонкое веревочное кольцо массой m и радиусом R положили на гладкую горизонтальную поверхность и раскрутили до угловой скорости ω. Найдите силу натяжения веревки.*

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = m\Delta l/(2\pi R)$, который виден из центра окружности под малым углом $\Delta\varphi = \Delta l/R$ (рис.3). Действующая на элемент сила равна векторной сумме

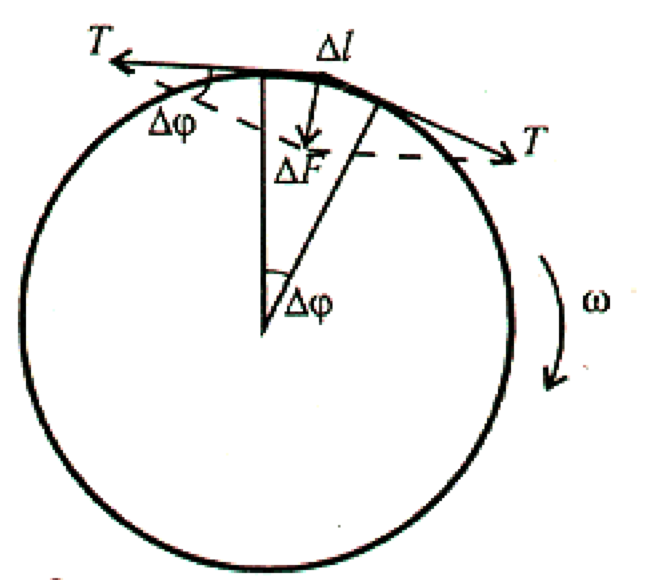

Рис. 3

двух сил натяжения: $\Delta F = T\Delta\varphi$. Из второго закона Ньютона $\Delta F = \Delta m\omega^2 R$ находим

$$T = \frac{m\omega^2 R}{2\pi}.$$

Полученный результат имеет неожиданное применение — с его помощью можно найти положение центра масс (центра тяжести) тонкой однородной полуокружности. Действительно, сила, действующая на вращающуюся полуокружность, равна $2T$, а в уравнение движения входит ускорение центра масс: $2T = (m/2)\omega^2 x$, где x — расстояние от центра окружности до центра масс полуокружности. Подставляя T, получаем $x = 2R/\pi$.

Задача 6. *Веревку длиной l и массой m кладут на гладкое горизонтальное бревно радиусом R (рис.4), причем вначале веревку удерживают за верхний конец, прикладывая горизонтальную силу F, а затем отпускают. Определите: а) значение силы F; б) ускорение веревки в первый момент.*

Обозначим через H расстояние по вертикали (разность высот) между верхней и нижней точками веревки. Если

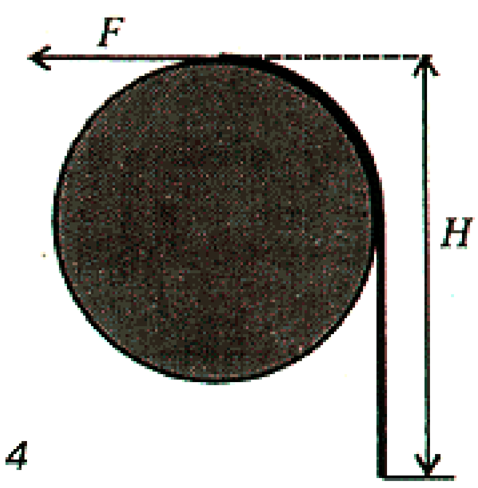

Рис. 4

веревка свешивается с бревна ($l > \pi R/2$), то $H = l - \pi R/2 + R$, если же нет, то $H = R\cos(l/R)$. Как мы увидим, в ответ будет входить только H.

Запишем второй закон Ньютона для элемента веревки длиной Δl и массой $\Delta m = (m/l)\Delta l = \lambda\Delta l$ (λ — масса единицы длины веревки) в проекциях на ось,

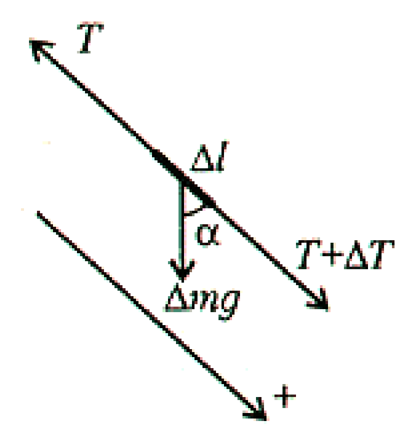

Рис. 5

направленную вдоль этого элемента (рис.5):

$$\Delta T + \Delta mg\cos\alpha = \Delta ma.$$

Здесь ΔT — разность между натяжениями на концах элемента, a — ускорение веревки (в первом случае, пока веревку удерживают, надо положить $a = 0$). Перед тем как просуммировать эти уравнения, заметим, что $\Delta m\cos\alpha = \lambda\Delta l\cos\alpha = \lambda\Delta h$, где Δh — расстояние по вертикали между концами элемента.

Теперь просуммируем уравнения вдоль всей длины веревки. Сумма всех ΔT равна разности сил натяжения на концах веревки, т.е. для неподвижной веревки это $-F$, а для свободной веревки это ноль. В случае а) получаем уравнение

$$-F + \lambda gH = 0, \text{ откуда } F = (m/l)gH.$$