# О вписанно-описанных многоугольниках

**А.ЗАСЛАВСКИЙ**

В КНИГАХ по элементарной геометрии достаточно часто встречаются задачи о вписанных или описанных четырехугольниках. Существенно более редкими являются задачи о четырехугольниках, являющихся вписанными и описанными одновременно. Сведения же о вписанно-описанных многоугольниках с большим числом сторон ограничиваются, пожалуй, *теоремой Понселе*. Приведем ее формулировку:

*Пусть окружность β лежит внутри окружности α. Из точки A окружности α проведем касательную к окружности β и найдем вторую точку $A_1$ ее пересечения с α. Из точки $A_1$ проведем касательную к β и найдем вторую точку $A_2$ ее пересечения с α и т.д. Если для некотрой точки A точка $A_n$ совпадает с A, то это будет выполнено и для любой другой точки окружности α.*

Теорема Понселе, безусловно, является одной из самых сложных и красивых теорем элементарной геометрии. Ее доказательство можно найти, например в «Задачнике по планиметрии» И.Ф.Шарыгина (задача 615). Оказывается, однако, что если число $n$ четно, то теорему можно усилить:

*Пусть O — центр α, I — центр β, A — произвольная точка α, B — точка, полученная из A через n/2 описанных в формулировке теоремы Понселе шагов. Тогда точка M пересечения прямых AB и OI не зависит от выбора точки A.*

Прежде чем доказывать усиленную теорему, сформулируем две леммы, верные для любых двух окружностей, одна из которых лежит внутри другой.

**Лемма 1.** *Пусть AB и CD — касательные к β, перпендикулярные прямой OI (A, B, C, D лежат на α), M — точка пересечения диагоналей трапеции ABCD (очевидно, M лежит на OI), P — произвольная точка α, PQ — касательная к β. Тогда отношение PQ/PM не зависит от P (рис.1).*

**Доказательство.** Введем систему координат с началом в точке $O$ и осью абсцисс, совпадающей с $OI$. Пусть $OI = d$. Нетрудно убедиться, что координата $l$ точки $M$ удовлетворяет равенству

$$\left(R^2+d^2-r^2\right)/\left(R^2+l^2\right)=d/l,$$

где $R$ и $r$ — радиусы α и β соответственно. Пусть теперь $P$ — точка с координатами $(R\cos\varphi, R\sin\varphi)$. Тогда $PM^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos\varphi$, $PQ^2 = PI^2 - r^2 = R^2 + d^2 - r^2 - 2Rd\cos\varphi$, и отношение $PQ/PM$ не зависит от φ.

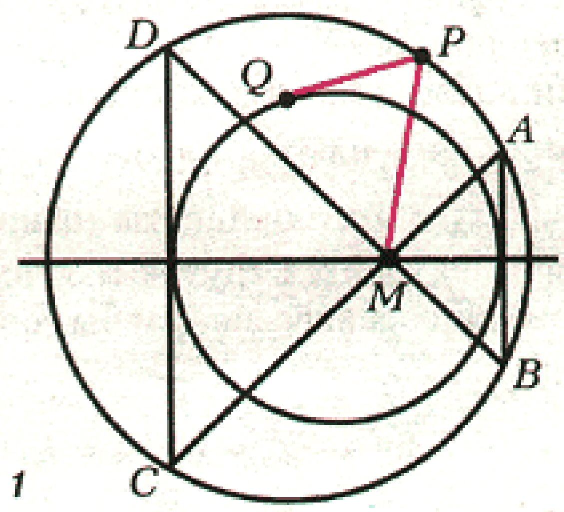

Рис. 1

**Лемма 2.** *Пусть A, B — точки α, AB касается β, A′, B′ — вторые точки пересечения прямых AM и BM с α. Тогда A′B′ касается β (рис.2).*

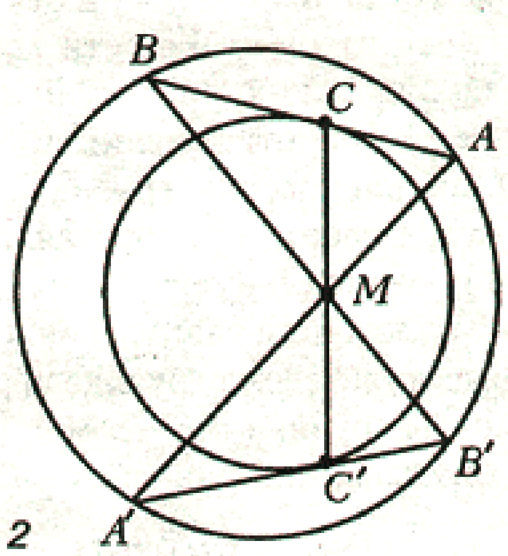

Рис. 2

**Доказательство.** Пусть $C$ — точка касания $AB$ и β. Из леммы 1 следует, что $MC$ — биссектриса угла $AMB$. Продолжим $MC$ за точку $M$ до пересечения с $A'B'$ в точке $C'$. Так как треугольники $AMB$ и $B'MA'$ подобны, $A'C'/AM = B'C'/BM = AC/AM$. По лемме 1 это означает, что отрезки $A'C'$ и $B'C'$ равны касательным, проведенным из $A'$ и $B'$ к β, а это возможно только если прямая $A'B'$ касается β в точке $C'$.

Теперь усиленная теорема Понселе доказывается совсем просто. Действительно, пусть $A_0A_1$ — сторона вписанно-описанного $2k$-угольника, $B_0$, $B_1$ — вторые точки пересечения прямых $A_0M$, $A_1M$ с α. Покажем, что $B_0$ совпадает с $A_k$. Предположим, например, что $A_k$ находится ближе к $A_1$, чем $B_0$. Тогда по лемме 2 $B_k$ находится ближе к $B_1$, чем $A_0$, и следовательно, $A_{k+1}$ ближе к $A_0$, чем $B_1$. Таким образом, $A_kA_{k+1}$ не может касаться β. Аналогично разбирается случай, когда $A_k$ находится дальше от $A_1$, чем $B_0$.

Из усиленной теоремы Понселе легко выводятся следующие свойства вписанно-описанных многоугольников с четным числом сторон:

1) *Главные диагонали многоугольника пересекаются в одной точке M.*

2) *Точка M лежит на прямой, соединяющей центры окружностей.*

3) *Прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон многоугольника с вписанной окружностью, тоже проходят через M и являются биссектрисами углов между диагоналями.*

Для читателей, знакомых с понятием *инверсии*, отметим также, что инверсия с центром в $M$ переводит вписанную и описанную окружности в концентрические.

На рисунках 3, 4 приведены примеры вписанно-описанных шести- и восьмиугольника.

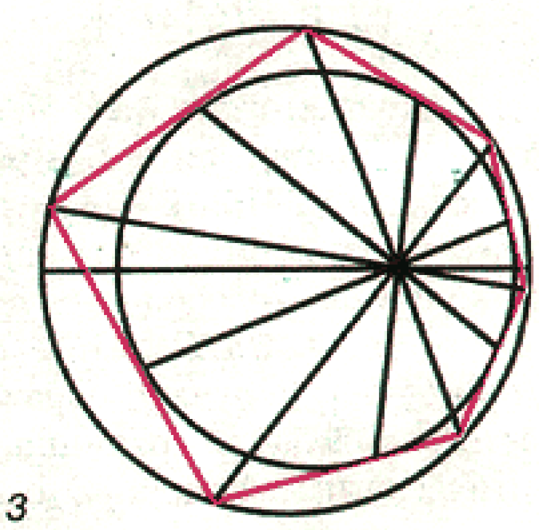
Рис. 3

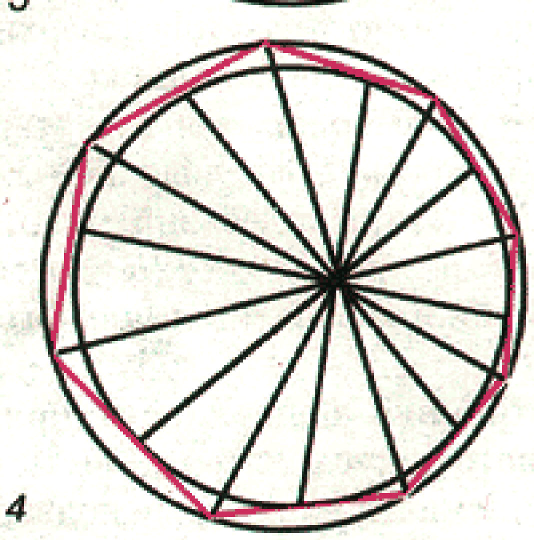
Рис. 4

Теперь нам придется сделать небольшое отступление. Прежде всего напомним одну простую задачу:

*Степенью точки относительно окружности называется величина $d^2 - r^2$, где r и d, соответственно, радиус окружности и расстояние от точки до ее центра. Требуется найти множество точек, степени которых относительно двух данных неконцентрических окружностей равны.*