где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{q}\sqrt{-D}\right).$$

Формулы (14) не были известны в XVI веке. Однако и в XX веке они не производят приятного впечатления, поскольку, например, для уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$, корнями которого, как легко проверить, являются числа 1, 2 и −3, формулы (14) приходится использовать при $D = -\frac{100}{27}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{10\sqrt{3}}{27}\right)$, $\sqrt{-\frac{p}{3}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Теперь о целых значениях p и q таких, что $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ есть квадрат целого числа. Очевидно, что в этом случае q делится на 2, а p — на 3. Введя обозначения $r = \frac{q}{2}$, $s = \frac{p}{3}$, $n = \sqrt{D}$, приходим к задаче решения в целых числах уравнения (диофантова)

$$r^2 + s^3 = n^2. \qquad (15)$$

Легко видеть, что если $(r;\ s;\ n)$ — решение (15), то $(\pm r;\ s;\ \pm n)$ и $(\pm n;\ -s;\ \pm r)$ — также решения этого уравнения. Следовательно, достаточно искать натуральные решения (15).

Непосредственно проверяется, что $\left(\frac{s(s-1)}{2}; s; \frac{s(s+1)}{2}\right)$ при всех $s = 2, 3, \ldots$ есть решение (15). Если $s^3 = p_1^3 p_2^3 \ldots p_\nu^3$, где $1 < p_1 \le p_2 \le \ldots p_\nu$ — простые числа, то записывая s^3 в виде произведения двух сомножителей одной четности, т.е. в виде

$$s^3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2,\ \sigma_2 - \sigma_1 = 2l \qquad (16)$$

(причем для нечетных s используется и представление $s^3 = 1 \cdot s^3$), непосредственно убеждаемся в том, что $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)$ — решение (15). Действительно,

$$\left(\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right)^2 = \sigma_1\sigma_2 = s^3.$$

Таким образом, все натуральные решения уравнения (15) даются формулой

$$\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}; s; \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2}\right), \qquad (17)$$

где

$$\sigma_1\sigma_2 = s^3,\ \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \in \mathbf{N},\ \frac{\sigma_2 + \sigma_1}{2} \in \mathbf{N}.$$

Формула (17) позволяет получать для уравнений вида (1) решения типа $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, а также находить сами такие уравнения.

Решения (15) можно получить и из тождества

$$\left(u\left(u^2 + 3v^2\right)\right)^2 + \left(v^2 - u^2\right)^3 = \left(v\left(3u^2 + v^2\right)\right)^2.$$

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Математический маятник на наклонных поверхностях

П.ХАДЖИ, А.МИХАЙЛЕНКО

ПРЕДЛАГАЕМ вам рассмотреть несколько частных случаев из жизни математического маятника с длиной нити L и массой подвешенного к ней грузика m.

Наклонная плоскость. Пусть математический маятник расположен на абсолютно гладкой поверхности, наклоненной под углом α к вертикали (рис.1,*а*). В положении равновесия на тело маятника действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, натяжение нити $\vec{N}$, направленное по нити, и реакция опоры $\vec{Q}$, перпендикулярная плоскости. Проектируя все силы вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней, получаем

$$N = mg\cos\alpha,\ Q = mg\sin\alpha.$$

При отклонении нити от равновесного положения на небольшой угол φ маятник начнет двигаться по дуге окружности на наклонной плоскости. При этом нормальная составляющая силы тяжести сохраняет свое значение, а сила натяжения нити меняется по величине. Ответственной за создание возвращающей силы F является проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Из рисунка 1,*б*, на котором изображены действующие на маятник силы в проекции на наклонную плоскость, видно, что

$$F = mg\cos\alpha\sin\varphi.$$

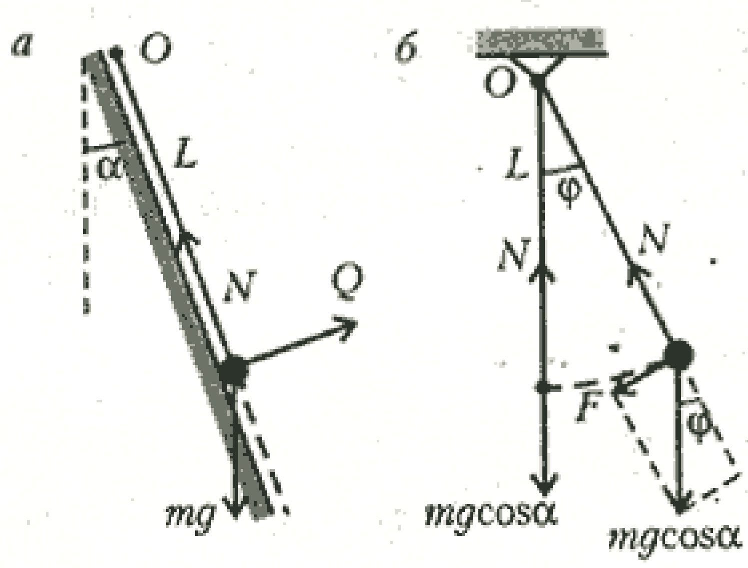

Рис. 1

Считая колебания малыми ($\varphi \ll 1$), получаем

$$F = mg\cos\alpha \cdot \varphi = mg\cos\alpha \cdot \frac{x}{L},$$

где x — длина дуги окружности, вдоль которой движется грузик маятника. Таким образом, возвращающая сила F пропорциональна смещению x из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Сравнивая полученный результат с известными соотношениями для обычного маятника, легко прийти к выводу, что частота колебаний математического маятника на наклонной плоскости выражается формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\cos\alpha}.$$

При $\alpha = 0$ для частоты колебаний снова получаем известное выражение $\omega = \sqrt{g/L}$. С ростом угла наклона плоскости α частота колебаний монотонно убывает, обращаясь в ноль при $\alpha = 90^\circ$ (это связано с тем, что проекция силы тяжести на наплонную плоскость убывает с ростом угла α).

Внутренняя поверхность полусферы. Представим себе, что математический маятник прикреплен в некоторой точке