раскрывается:

$$\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^3+6\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)^3-2=$$
$$=4-3\left(\sqrt[3]{4}\right)^2\cdot\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2-2+$$
$$+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}-2=$$
$$=-3\sqrt[3]{32}+3\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}=$$
$$=-3\cdot2\sqrt[3]{4}+3\cdot2\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{2}=0.$$

Приведем еще несколько примеров с подобными свойствами:

$$x^3+9x-6=0,\ x=\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3};$$
$$x^3-12x-20=0,\ x=\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4};\ (8)$$
$$x^3+15x-20=0,\ x=\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{5}.$$

С большой степенью уверенности можно утверждать, что уравнения (7), (8) были среди тридцати, которые должен был на диспуте решить Тарталья.

Обсудим теперь вопрос о том, насколько частным является разобранный выше случай кубического уравнения, и попытаемся найти все целые значения p и q такие, что дискриминант $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ есть точный квадрат.

Произвольное уравнение третьей степени

$$a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0,\ a_0\neq0\quad(9)$$

делением на a_0 приводится к виду

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0.$$

Если в этом уравнении положить $x=y-\frac{b_1}{3}$, то получим

$$y^3-b_1y^2+\frac{b_1^2}{3}y-\frac{b_1^3}{27}+b_1y^2-\frac{2}{3}b_1^2y+$$
$$+\frac{b_1^3}{9}+b_2y-\frac{b_1}{3}+b_3=$$
$$=y^3+\left(b_2-\frac{b_1^2}{3}\right)y+\left(\frac{2}{27}b_1^3-\frac{b_1}{3}+b_3\right)=$$
$$=y^3+py+q=0.$$

Поэтому изучение уравнения (1) позволяет исследовать и уравнения (9). Для $x\neq0$

$$x^3+px+q=x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)$$

и при достаточно больших значениях $|x|$ выражение в скобках положительно, а знак x^3+px+q совпадает со знаком x. В силу этого уравнение (1) при любых p и q имеет по крайней мере один действительный корень x_1. По теореме Безу имеем

$$x^3+px+q=(x-x_1)\left(x^2+x_1x-\frac{q}{x_1}\right)$$

при $x_1\neq0$. Если же $x_1=0$, то $q=0$ и (1) принимает вид $x^3+px=0$, откуда $x(x^2+p)=0$ и решение не представляет труда. Уравнение $x^2+x_1x-\frac{q}{x_1}=0$ имеет два, возможно и совпадающих, действительных корня или вообще не имеет действительных корней. Допустим, имеется три действительных корня. По теореме Безу тогда

$$x^3+px+q=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=$$
$$=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+$$
$$+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3,$$

откуда

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p,\\ -x_1x_2x_3=q.\end{cases}\qquad(10)$$

Считаем $q\neq0$, так как в противном случае один из корней равен нулю и исследование тривиально. Исключение из (10) с помощью первого уравнения величины x_3 приводит к системе

$$\begin{cases}x_1x_2-(x_1+x_2)^2=p,\\ x_1x_2(x_1+x_2)=q.\end{cases}\qquad(11)$$

В силу первого из уравнений (10) два корня уравнения (1), скажем x_1 и x_2, имеют совпадающие знаки, а x_3 — противоположный им знак. Тогда $x_1x_2>0$. Очевидно, что

$$p=x_1x_2-(x_1+x_2)^2=$$
$$=-\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)=$$
$$=-\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2-\frac{3}{4}x_2^2<0.$$

Итак, если уравнение (1) имеет три действительных ненулевых корня, то $p<0$. Из второго уравнения (11)

$$(x_1x_2)^2(x_1+x_2)^2=q^2$$

и, используя неравенство между средними арифметическим и геометрическим,

$$(x_1+x_2)^2\geq4x_1x_2,$$

откуда

$$(x_1x_2)^3\leq\frac{q^2}{4}.\qquad(12)$$

Преобразуем дискриминант, учитывая (11) и (12):

$$D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=$$
$$=\frac{q^2}{4}+\frac{\left(x_1x_2-q^2(x_1x_2)^{-2}\right)^3}{27}=$$
$$=\frac{4(x_1x_2)^9+15q^2(x_1x_2)^6}{108(x_1x_2)^6}+$$
$$+\frac{12q^4(x_1x_2)^3-4q^6}{108(x_1x_2)^6}=$$
$$=\frac{\left((x_1x_2)^6+4q^2(x_1x_2)^3+4q^4\right)\left(4(x_1x_2)^3-q^2\right)}{108(x_1x_2)^6}=$$
$$=\frac{\left((x_1x_2)^3+2q^2\right)^2\left((x_1x_2)^3-\frac{q^2}{4}\right)}{27(x_1x_2)^6}\leq0.$$

Следовательно, если уравнение (1) имеет три действительных корня, то дискриминант $D=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\leq0$. Если $D=0$, то по (6) имеем $x_3=-\sqrt[3]{4q}$, а $p=-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\sqrt[3]{q^2}$. Следовательно,

$$x^3+px+q=x^3-3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4}}x+q=$$
$$=\left(x+\sqrt[3]{4q}\right)\left(x^2-\sqrt[3]{4q}x+\frac{1}{4}\sqrt[3]{(4q)^2}\right)=$$
$$=\left(x+\sqrt[3]{4q}\right)\left(x-\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}\right)^2$$

и $x_1=x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q}$. Итак, при $q\neq0$, $D=0$

$$x_1=x_2=\frac{1}{2}\sqrt[3]{4q},\ x_3=-\sqrt[3]{4q},\ (13)$$

т.е. уравнение (1) имеет два совпадающих из трех действительных корней. Если $q\neq0$, $D<0$, то (1) имеет три действительных попарно различных корня. Наконец, при $q\neq0$, $D>0$ уравнение (1) имеет один действительный корень, вычисляемый по формуле (6).

При $D<0$ формула (6) позволяет найти все три действительных корня уравнения (1), однако для этого приходится использовать комплексные числа. Можно показать, что

$$x_1=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\frac{\varphi}{3},$$
$$x_2=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right),\ (14)$$
$$x_3=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\varphi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right),$$