О кубических уравнениях

А. РУБИНШТЕЙН

20 февраля 1535 года в итальянском городе Болонья состоялся публичный диспут-поединок между профессором Никколо Фонтана по прозвищу Тарталья, занимавшим кафедру математики в Вероне, и неким Фиоре. В то время такие состязания были явлением нередким. Противники предлагали друг другу заранее оговоренное число задач, и тот, кто успешнее справлялся с ними за отведенные несколько часов, объявлялся победителем. Он награждался обусловленным денежным призом и получал возможность занять университетскую кафедру, часто за счет побежденного. Подобный порядок вел к тому, что полученные математические результаты хранились авторами в тайне.

Важнейшим математическим достижением XVI века явилось решение алгебраических уравнений третьей и четвертой степени (квадратные уравнения умели решать уже древние). В начале XVI века профессор математики Болонского университета Сципион дель-Ферро нашел метод решения уравнений вида

$$x^3 + px + q = 0 \qquad (1)$$

с $p > 0$. Легко сообразить, что при этом условии уравнение (1) имеет единственное действительное решение, поскольку если его записать в эквивалентном виде

$$x^3 = -px - q,$$

то становится очевидным строгое возрастание от $-\infty$ до $+\infty$ функции в левой части и строгое убывание от $+\infty$ до $-\infty$ функции в правой части. Быть равными они могут, следовательно, лишь при одном значении аргумента, причем это обязательно происходит.

Свое открытие дель-Ферро держал, разумеется, в строгом секрете и лишь незадолго до смерти в 1526 году сообщил его двум своим ученикам, одним из которых и был Фиоре. К 1535 году Тарталья был достаточно известным математиком. Прозвище свое — «заика» — он получил из-за невнятной речи (в детстве, когда его родной город Брешия в 1512 году заняли французские войска, он был ранен в лицо). Получив вызов, Тарталья понял, что Фиоре знает метод решения уравнения (1). Упорно работая день и ночь, Тарталья за 8 дней до диспута нашел этот метод. В результате за два часа 20 февраля 1526 года он решил все 30 задач, предложенных ему Фиоре и оказавшихся, как и предполагалось, уравнениями вида (1). А Фиоре не смог решить ни одной из 30 задач, выбранных Тартальей из различных разделов математики.

Попытаемся реконструировать ход рассуждений Тартальи. Запишем очевидное тождество

$$(u+v)^3 - 3uv(u+v) - (u^3+v^3) = 0. \qquad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) легко заметить, что $x = u + v$ является решением (1), если

$$\begin{cases} p = -3uv, \\ q = -(u^3+v^3), \end{cases} \qquad (3)$$

или

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{p}{3}\right)^3 = u^3v^3, \\ q = -(u^3+v^3). \end{cases} \qquad (4)$$

Если исключить из (4) v^3 или u^3, то видно, что u^3 и v^3 являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \qquad (5)$$

с положительным при $p > 0$ дискриминантом

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

Следовательно,

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},$$

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

и окончательно

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \qquad (6)$$

Это и есть формула, полученная Тартальей, установленная ранее дель-Ферро, но называемая формулой Кардано — по имени еще одного итальянца, впервые опубликовавшего ее в 1545 году в сочинении «О великом искусстве, или об алгебраических вещах, в одной книге».

Теперь о задачах Фиоре. Сомнительно, что он мог предложить Тарталье уравнения, решением которых является целое число, например $x^3 + 6x - 7 = 0$. Разумеется, как это в то время было принято, коэффициенты уравнений выбирались целыми. Целые решения можно подобрать, так как для уравнения (1) целые решения являются делителями свободного члена q. Процедура подбора, конечно, затрудняется, если в (3) взять значение u большим положительным, а v — малым отрицательным целыми числами, причем так, чтобы $u + v$ имело много делителей. Например, если $u = 25$, $v = -1$, то по (3) число $24 = 25 + (-1)$ является корнем уравнения $x^3 + 75x - 15624 = 0$. Однако сомнительно, чтобы Фиоре рискнул оставить сопернику шанс найти решение путем подбора. Скорее всего, он подобрал примеры, в которых $\frac{q}{2}$ и $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ — целые и последнее является полным квадратом, однако числа $-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ не являются кубами целых чисел. Используя тройки пифагоровых чисел, т.е. таких целых, что $a^2 + b^2 = c^2$, и выбирая те из них, в которых одно из двух меньших чисел является кубом, подобные примеры можно строить. Возможно и комбинирование таблиц квадратов и кубов натуральных чисел. Например, при $q = -2$, $p = 6$ получаем уравнение

$$x^3 + 6x - 2 = 0. \qquad (7)$$

По (6) единственным действительным решением уравнения (7) является число $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Не представляет труда непосредственным подсчетом это проверить, причем секрет формулы (6) не