са (или второго закона Кеплера), можно записать

$$Mv_0L = Mvs.$$

Решая эти уравнения совместно, найдем

$$s = \frac{L}{GM/\left(Lv_0^2\right) - 1}, \quad v = v_0\left(\frac{GM}{Lv_0^2} - 1\right).$$

Проанализируем полученный ответ. Отрицательное значение знаменателя в первой формуле соответствует разлету шариков на бесконечное расстояние, это произойдет при выполнении условия $v_0^2 > GM/L$. Если знаменатель меньше единицы, то все в порядке, а если он больше единицы — то мы нашли минимальное расстояние между шариками (наши уравнения годятся и для минимума, и для максимума). В этом случае ответ простой: максимальное расстояние между шариками L, а минимальная скорость v_0. Это соответствует выполнению условия

$$\frac{GM}{Lv_0^2} - 1 > 1, \text{ или } v_0^2 < \frac{GM}{2L}.$$

И наконец, если скорости шариков не слишком малы и не очень велики, т.е. лежат в найденных границах, то максимальное расстояние — это s, а минимальная скорость — v.

Р.Шариков

Ф1625. *В кубическом сосуде объемом $V = 1$ м^3 находится гелий при температуре $T = 300$ К и давлении $p = 10^5$ Па. В стенке сосуда открывают отверстие площадью $S = 1$ см^2 и через время $\tau = 0{,}01$ с закрывают. Снаружи — вакуум. Оцените изменение температуры газа в сосуде после установления в нем равновесия. Считайте, что открывание и закрывание отверстия производят очень аккуратно — не создавая лишних потоков газа.*

Газ в сосуде довольно плотный, молекулы вылетают из сосуда как бы «сплошной средой». Оценим число вылетевших молекул — его мы найдем так же, как обычно получают число ударов молекул о стенку сосуда (тут несущественны удары молекул друг о друга). За время τ вылетает половина молекул из объема $Sv\tau$. Скорость молекул v оценим из средней кинетической энергии (мы потом непременно проверим, не слишком ли сильно изменится температура и можно ли для ее оценки использовать начальное значение 300 К): $v = \sqrt{3RT/\mathrm{M}} \approx 1500$ м/с, где $\mathrm{M} = 4$ г/моль — молярная масса гелия. Тогда объем, в котором вначале содержались вылетевшие молекулы, составит

$$\Delta V = \frac{1}{2}Sv\tau \approx 7\cdot 10^{-4}\ \text{м}^3 \ll V.$$

Видно, что в сосуде практически ничего не изменилось.

Оставшийся в сосуде газ совершит некоторую работу, «выдавливая» вылетающую порцию наружу. Тепла к сосуду не подводилось, значит, работа совершается за счет уменьшения внутренней энергии газа. Запишем уравнение первого начала термодинамики:

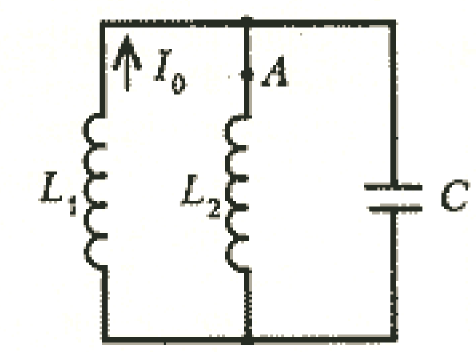
$$p\Delta V = -\Delta U = -1{,}5\nu R\Delta T.$$

Отсюда, учитывая уравнение состояния $pV = \nu RT$, найдем

$$\Delta T = -T\frac{2\Delta V}{3V} \approx -0{,}15\ K.$$

А.Повторов

Ф1627 [1]. *Конденсатор емкостью C подключают к параллельно соединенным катушкам, индуктивности которых L_1 и L_2 (см. рисунок [2]). В начальный момент конденсатор не заряжен, через первую катушку течет ток I_0, ток второй катушки равен нулю. Найдите максимальный заряд конденсатора и максимальную величину тока в точке A.*



Катушки подключены параллельно, значит, их ЭДС индукции в любой момент одинаковы, а изменения магнитных потоков через них равны между собой. (Тот же вывод можно сделать, рассматривая магнитный поток через сверхпроводящий контур, образованный катушками.) Обозначая токи катушек в некоторый момент времени I_1 и I_2, запишем

$$L_1I_0 = L_1I_1 + L_2I_2.$$

Максимальный заряд конденсатора соответствует моменту, когда ток, «втекающий» в обкладку конденсатора, обращается в ноль, т.е. $I_1 = I_2$. Тогда заряд можно найти, используя закон сохранения энергии. После несложных преобразований получим

$$Q_m = I_0\sqrt{\frac{CL_1L_2}{L_1 + L_2}}.$$

Максимальный ток через вторую катушку получится в тот момент, когда ЭДС индукции обратится в ноль. Это означает, что и заряд конденсатора в этот момент обращается в ноль. Тогда закон сохранения энергии можно записать без учета энергии конденсатора:

$$L_1I_1^2 + L_2I_2^2 = L_1I_0^2.$$

Объединяя это уравнение с уравнением для токов (магнитных потоков), получим

$$L_1I_0^2 = L_1\left(I_0 - \frac{L_2I_2}{L_1}\right)^2 + L_2I_2^2.$$

У этого уравнения для I_2 имеются два корня. Один из них равен нулю — он соответствует минимальному значению этого тока (условия минимума очень похожи на условие максимума — ЭДС индукции и в этом случае равна нулю), а второй корень искомый:

$$I_2 = 2I_0\frac{L_1}{L_1 + L_2}.$$

Р.Александров

[1] *Решение задачи Ф1626 будет опубликовано позже.*

[2] *К сожалению, на рисунке в условии задачи (см. «Квант» №6 за 1997 г.) допущена неточность.*