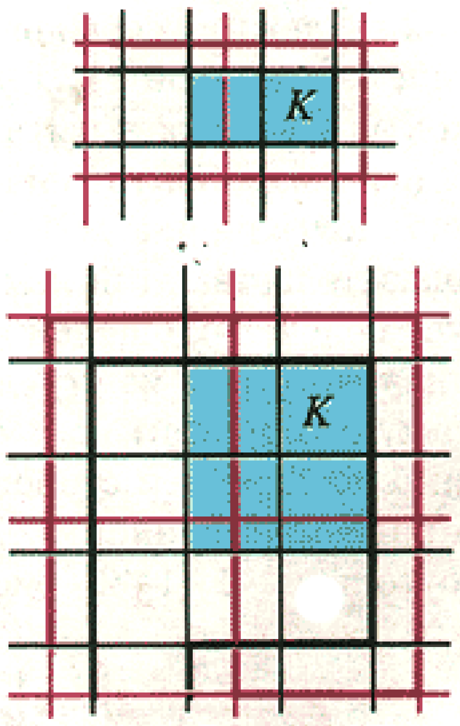

Рис.4

уменьшается на 2 или 4 клетки (рис.4). Поскольку для M, состоящего из одного квадрата, внутренность — одна клетка, по индукции мы докажем, что для любого M она состоит из нечетного числа клеток.

А.Шаповалов, Н.Васильев

Ф1623. *На гладком горизонтальном столе находится клин массой M с углом 45° при основании, на нем — клин такой же массы M с таким же углом, так что верхняя плоскость второго клина горизонтальна, а на ней лежит кубик массой m (рис.1). Всю конструкцию удерживают неподвижной. Какую скорость приобретет кубик через время τ после растормаживания системы? Трением пренебречь. Считать, что за указанный интервал времени характер движения не меняется.*

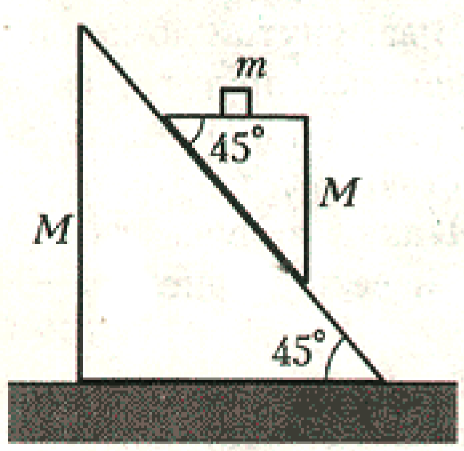

Рис.1

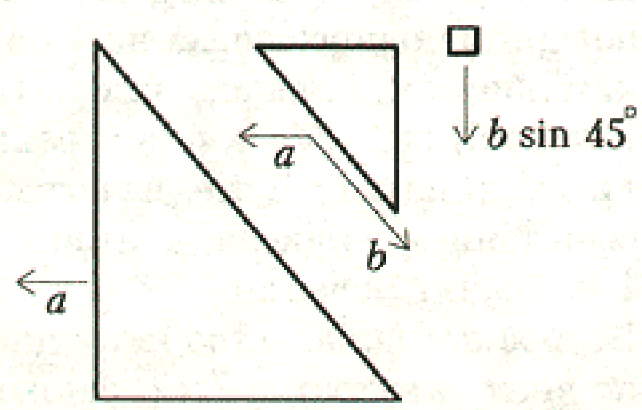

Рис.2

Обозначим буквой a ускорение нижнего клина — оно горизонтальное (рис.2). Ускорение верхнего клина относительно нижнего направлено вдоль плоскости их соприкосновения — вниз под углом 45° к горизонту. Удобно представить полное ускорение верхнего клина в виде суммы двух векторов — горизонтально направленного вектора, по величине равного a, и направленного вниз под углом 45° вектора, равного по величине b. Тогда горизонтальная составляющая ускорения верхнего клина направлена противоположно ускорению нижнего и равна $b\cos 45° - a$, вертикальная составляющая равна $b\sin 45°$. Ускорение кубика, очевидно, направлено вниз и равно вертикальной составляющей ускорения верхнего клина, т.е. $b\sin 45°$.

Найдем соотношение между величинами a и b. Для этого вспомним, что в отсутствие внешних горизонтальных сил ускорение центра масс по горизонтали должно быть нулевым. Кубик движется строго вертикально, поэтому

$$M(b\cos 45° - a) = Ma,\ b = 2a/\cos 45° = 2\sqrt{2}a.$$

Тогда горизонтальная составляющая полного ускорения верхнего клина относительно земли равна a, вертикальная составляющая ускорения этого клина (и кубика) равна $2a$. Модуль полного ускорения клина при этом равен $\sqrt{5}a$.

Для нахождения ускорений тел воспользуемся законом сохранения энергии. Для этого подождем время τ после начала движения тел и приравняем полную кинетическую энергию системы уменьшению ее потенциальной энергии. Скорости и смещения за время τ найдем по соответствующим формулам для равноускоренного движения. Уменьшение потенциальной энергии системы связано с вертикальным смещением верхнего клина и кубика:

$$\Delta E_p = (M+m)g\frac{2a\tau^2}{2}.$$

Суммарная кинетическая энергия тел равна

$$E_k = \frac{M(a\tau)^2}{2} + \frac{M\left(\sqrt{5}a\tau\right)^2}{2} + \frac{m(2a\tau)^2}{2}.$$

Приравнивая ΔE_p и E_k, получим величину ускорения a:

$$a = g\frac{M+m}{3M+2m},$$

а значит, и скорость кубика через время τ после начала движения:

$$v = 2a\tau = 2g\tau\frac{M+m}{3M+2m}.$$

З.Рафаилов

Ф1624. *Два маленьких шарика массой M каждый находятся на расстоянии L друг от друга и имеют одинаковые по величине и противоположно направленные скорости v_0, перпендикулярные отрезку, соединяющему шарики. Никаких внешних сил нет. Учитывая гравитационное взаимодействие шариков, найдите максимальное расстояние между ними в процессе движения и минимальные скорости шариков.*

При достаточно большой начальной скорости шариков расстояние между ними будет увеличиваться, а их скорости будут уменьшаться — шарики притягиваются друг к другу. В этом случае максимальное расстояние между шариками соответствует минимальной скорости (в силу симметрии, скорости шариков в любой момент равны друг другу). Если шарики не разлетятся на бесконечное расстояние (а при достаточно большой скорости так и было бы), максимальное расстояние между ними будет в тот момент, когда проекции скоростей на прямую, соединяющую шарики, окажутся равными нулю. Обозначим скорости шариков в этот момент v, а расстояние между ними s. Тогда из закона сохранения энергии получим (шариков — два!)

$$Mv_0^2 - \frac{GM^2}{L} = Mv^2 - \frac{GM^2}{s}.$$

В соответствии с законом сохранения момента импуль-