валентности установим соответствие между расположениями прямых и наборами точек на окружности, при котором остроугольным треугольникам соответствуют треугольники (с вершинами на окружности), содержащие внутри себя центр окружности. Для этого достаточно прямым, составляющим угол φ с фиксированной прямой (скажем, осью Ox), сопоставить точку на фиксированной окружности δ с координатой 2φ, где $0 \le \varphi < \pi$. Нетрудно проверить, что при таком соответствии тройка прямых разных направлений (не проходящих через одну точку) ограничивает прямоугольный треугольник, если две из соответствующих им точек на окружности δ диаметрально противоположны, тупоугольный (остроугольный) треугольник — если точки лежат (соответственно, *не* лежат) по одну сторону от некоторого диаметра δ.

С.Иванов

М1615. *В прямоугольную коробку $m \times n$, где m и n — нечетны, уложены кости домино размерами 2×1 так, что остался не покрыт только квадрат 1×1 (дырка) в углу коробки. Если доминошка прилегает к дырке короткой стороной, ее разрешается сдвинуть вдоль себя на одну клетку, закрыв дырку (при этом открывается новая дырка). Докажите, что с помощью таких передвижений можно перегнать дырку в любой другой угол.*

Назовем *полями* клетки доски, стоящие на пересечении горизонталей и вертикалей с нечетными номерами (см. рисунок 1, где поля закрашены голубым цветом). Заметим, что дырка будет перемещаться только по этим полям. Докажем, что на доске $m \times n$ дырка, первоначально расположенная в углу, может быть перемещена в любое другое поле, как бы ни были расположены доминошки.

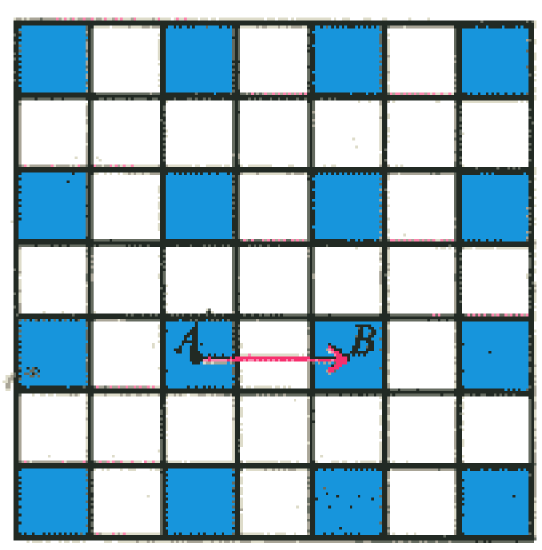

Рис.1

Из центра каждого поля A, закрытого доминошкой, проведем стрелку в соседнее поле, граничащее с короткой стороной этой доминошки; если дырка находилась бы в B, то после передвижения этой доминошки она попала бы в A. Таким образом, из каждого поля выходит ровно одна стрелка (именно здесь используется нечетность m и n).

Докажем, что из каждого поля путь по стрелкам неизбежно приведет к полю, где расположена дырка, для этого убедимся, что такой путь не может зациклиться. Другими словами, не существует замкнутого пути из стрелок, ограничивающего многоугольник.

Для этого докажем, что (строго) внутри замкнутого контура из стрелок, соединяющих центры клеток — этот контур, очевидно, расположен на решетке квадратов со сторонами 2 — лежит *нечетное* число k клеток (исходной решетки со стороной 1). Тем самым, внутренность этого контура не может быть заполнена доминошками! (Здесь используется тот факт, что дырка лежит на границе прямоугольника.)

Приведем два доказательства этой леммы о нечетности. Первое использует подсчет площадей и углов. Вся площадь, ограниченная контуром из стрелок, очевидно, кратна 4, поскольку она состоит из нескольких квадратов 2×2. Отметим с внутренней стороны каждой стрелки контура полоску шириной $1/2$ — примыкающий к ней прямоугольник $2 \times 1/2$ (рис.2). Сумма площадей s таких полосок равна числу звеньев замкнутой ломаной и потому четна (вверх направлено столько же звеньев, сколько вниз, вправо — столько же, сколько влево). Но при каждом повороте на угол 90° или −90° образуется пересечение полосок площадью $1/4$ или возникает зазор между полосками и внутренними клетками с такой же площадью $1/4$. В замкнутой ломаной поворотов одного знака на 4 больше, чем другого. Таким образом, площадь зазора (шириной $1/2$) между контуром из стрелок и внутренностью из k клеток отличается на 1 от s, т.е. нечетна. Итак, k получается вычитанием из числа, кратного 4, нечетного числа $s-1$ и, значит, нечетно.

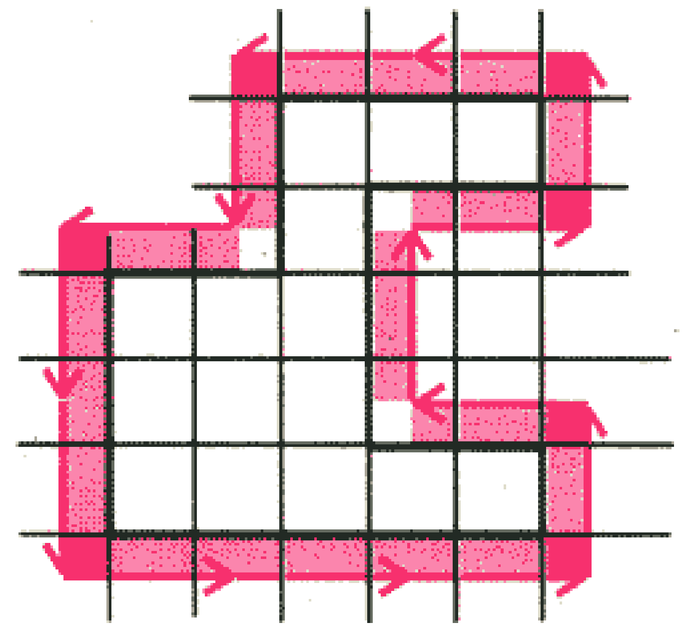
Рис.2

Второе доказательство нетрудно провести индукцией по числу квадратов 2×2, заключенных внутри контура. Нужно лишь доказать, что в любом многоугольнике M, состоящем из нескольких квадратов клетчатой бумаги, можно выбрать один «крайний» квадрат, после удаления которого остается (нераспадающийся) многоугольник. Это можно сделать (примерно так же, как выше «с помощью стрелок» мы искали путь для перемещения доминошек).

Выберем из нашего многоугольника M любой квадрат — присвоим ему номер 0, соседним с ним (по стороне) квадратам из M присвоим номер 1, их соседям (которые еще не имеют номера) присвоим номер 2, и т.д. (рис.3). Квадрат K с наибольшим номером и будет «крайним». Он граничит либо с одним квадратом из M, либо с двумя (причем в последнем случае весь угол из четырех квадратов, включающий K, принадлежит M); как легко видеть, внутренность M при удалении такого квадрата K

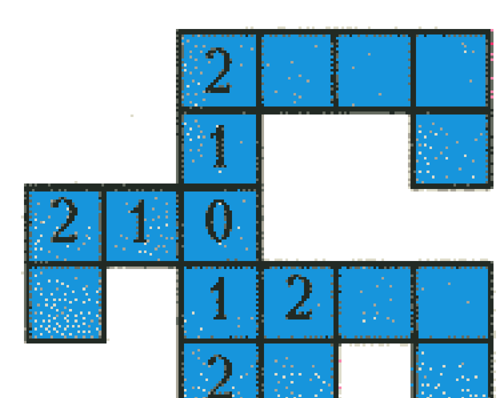

Рис.3